Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S4 – Année 2009-2010
ESI CS 1402 – Introduction au Calcul Scientifique — Promotion ESILV 2013

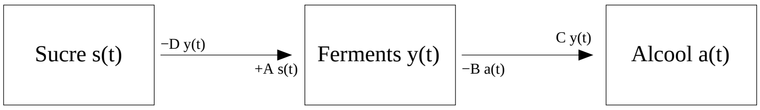
Feuille d'exercices 3

Corrigé

Exercice IV

1. Les quantités $y(t)$, $s(t)$ et $a(t)$ ne peuvent pas être négatives puisqu'elles représentent des quantités de ferments, de sucre et d'alcool. Dès que l'une d'entre elles s'annulle, la réaction correspondante s'arrête.

2. On a le diagramme suivant :



La variation y' des ferments est égale aux taux de naissance des ferments moins le taux de décès des ferments. Le taux de naissance est $A\,s(t)$ et le taux de décès est $B\,a(t)$. Ainsi

$$y'(t) = A\,s(t) - B\,a(t)$$

Le taux de création d'alcool est proportionnel à la quantité de sucre, ainsi

$$a'(t) = C\,y(t)$$

Le taux sucre détruit est proportionnel à la quantité de ferments, ainsi

$$s'(t) = -D\,y(t)$$

Il en résulte le système suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = A\,s(t) - B\,a(t) \\ a'(t) = C\,y(t) \\ s'(t) = -D\,y(t) \end{cases}$$

3. Il résulte de la première équation du système que

$$y''(t) = A\,s'(t) - B\,a'(t)$$

avec $a'(t) = C\,y(t)$ et $s'(t) = D\,y(t)$, ainsi

$$y''(t) = -AD\,y(t) - BC\,y(t)$$

En notant $\alpha = AD + BC$, il vient

$$y''(t) + \alpha\,y(t) = 0$$

Il est à noter que α est la somme de produits de quantité strictement positives, il est donc strictement positif.

4. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle du second ordre est $X^2+\alpha = 0$, dont les racines sont $i\sqrt{\alpha}$ et $-i\sqrt{\alpha}$, ainsi les solutions de léquation différentielle sont

$$C_1 \sin(\sqrt{\alpha}t) + C_2 \cos(\sqrt{\alpha}t)$$

où C_1 et C_2 sont deux réels indépendants de t (constantes).

5. On a $\alpha = \frac{1}{200} + \frac{1}{200} = \frac{1}{100}$ donc

$$y(t) = C_1 \sin\left(\frac{1}{10}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{1}{10}t\right)$$

et donc

$$y'(t) = \frac{C_1}{10} \cos\left(\frac{1}{10}t\right) - \frac{C_2}{10} \sin\left(\frac{1}{10}t\right)$$

Comme $a(0) = 0$, on a $y'(0) = s(0)$ or $y'(0) = \frac{C_1}{10} \cos 0$ donc

$$C_1 = 10s(0)$$

Par ailleurs $y(0) = C_2 \cos 0$ donc

$$C_2 = y(0)$$

donc

$$y = 10s(0) \sin\left(\frac{1}{10}t\right) + y(0) \cos\left(\frac{1}{10}t\right)$$