

Feuille d'exercices 2

Manipulation de modèles

Exercice I

On constate que la vitesse moyenne v des automobiles sur le boulevard périphérique dépend de la densité ρ de véhicules : les voitures vont plus vite lorsque le boulevard périphérique est fluide et moins vite lorsque celui-ci est saturé. On mesure les vitesses suivantes en fonction de la densité

ρ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
v	80	61	51	43	37	32	28	24	21	18

1. Proposer une fonction affine qui donne v en fonction de ρ au moyen de la droite des moindres carrés.
2. Proposer un polynôme de degrés au plus 2 qui donne v en fonction de ρ au moyen des moindres carrés.

Exercice II

Considérons le système de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} N' &= N \times (a - bP) \\ P' &= P \times (-d + cN) \end{cases}$$

où a , b , c et d sont des réels strictement positifs et N et P sont deux fonctions que l'on supposera de classe C^2 . On note $T > 0$ le plus petit réel non nul tel que $(N(T), P(T)) = (N(0), P(0))$. On cherche à calculer

$$M = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

en fonction de a et de b .

1. Montrer que

$$\int_0^T \frac{N'(t)}{N(t)} dt = \int_0^T [a - bP(t)] dt$$

2. Montrer que

$$\int_0^T [a - bP(t)] dt = 0$$

3. En déduire la valeur de M .
4. Que représente M ?

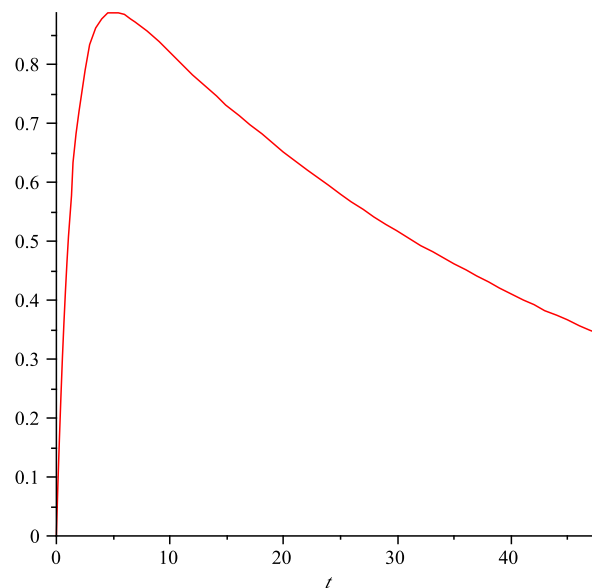
Exercice III

On souhaite modéliser l'absorption d'un comprimé. Le but de cet exercice est de trouver la quantité de médicament dans le sang au bout de t heures.

On note $x(t)$ la quantité de médicament dans l'appareil digestif au temps t , exprimé en heures. On note $x(0) = x_0$ la quantité de médicament avalé dans le comprimé. Progressivement, le médicament passe dans le sang. Le taux de médicament qui quitte l'appareil digestif et qui entre dans le sang est proportionnel à la quantité de médicament dans l'appareil digestif. La constante de proportionnalité sera notée k_1 .

Initialement, il n'y a pas de médicament dans le sang. Au fur et à mesure qu'il arrive de l'appareil digestif, une partie du médicament est éliminée par les reins. La quantité de médicament éliminée par les reins est proportionnelle à la quantité de médicament dans le sang. On note k_2 cette constante de proportionnalité et $y(t)$ la quantité de médicament dans le sang au temps t , exprimé en heures.

1. Ecrire l'équation différentielle dont x est solution et la résoudre.
2. Ecrire l'équation différentielle dont y est solution et la résoudre.
3. Dans le cas d'un antihistaminique (médicament contre les allergies), les constantes k_1 et k_2 sont respectivement 0.6931 et 0.0231. Vérifier que le taux de médicament dans le sang est représenté par cette courbe lors de la prise d'un comprimé d'un gramme. On pourra utiliser Maple ou tout autre logiciel *ad hoc*.



4. Un décongestionnant a des constantes k_1 et k_2 respectivement égales à 1.3860 et 0.1386. Tracer la courbe représentant la quantité de médicament dans l'appareil digestif et dans le sang sur une période de 24 heures si le comprimé est de un gramme.