Interrogation du 25/03/2008

Corrigé

Exercice I

Pour tracer la courbe de $x \mapsto x^2 + 1$ sur l'intervalle $[-2, 2]$ on exécute la commande suivante en Maple :

```
plot(x^2+1,x=-2..2);
```

ou la commande suivante en Matlab

```
x=-2:0.1:2;
y=x.^2+1;
plot(x,y)
```

Exercice II

1. Le système modélise un système proie-prédateur. Si P modélise la quantité de poisson d'une certaine espèce (ci-après désignée *prédateurs*) alors

- N modélise la quantité de poisson d'une espèce inférieure dans la chaine alimentaire (ci-aprés désignée *proies*) ;
- a est le rapport entre le taux de naissances des proies et la population des proies ;
- b est le rapport entre le décès des proies et le produit de la population des proies et des prédateurs ;
- c est le rapport entre les naissances des prédateurs et le produit de la population des proies et des prédateurs ;
- d est le rapport entre le taux de décès des prédateurs et la population des prédateurs.

2.

a . Comme N ne s'annule pas, on obtient de la première equation de (1) que, pour tout $t \in [0, T]$

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = a - bP(t)$$

L'intégration de cette égalité entre 0 et T donne l'identité recherchée

$$\int_0^T \frac{N'(t)}{N(t)} dt = \int_0^T [a - bP(t)] dt$$

b . Une primitive de $\frac{N'}{N}$ est $\ln N$ ainsi

$$\int_0^T [a - bP(t)]dt = \ln N(T) - \ln N(0)$$

or $N(T) = N(0)$, il vient donc

$$\int_0^T [a - bP(t)]dt = 0$$

c . L'égalité précédente donne

$$a\int_0^T dt - b\int_0^T [P(t)]dt = 0$$

ainsi

$$b\int_0^T [P(t)]dt = aT$$

Comme b est non nul, on en déduit que

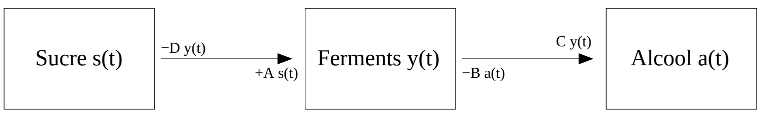
$$M = \frac{a}{b}$$

3. M représente la moyenne de la quantité de prédateurs sur un cycle.

Exercice III

1. Les quantités $y(t)$, $s(t)$ et $a(t)$ ne peuvent pas être négatives puisqu'elles représentent des quantités de ferments, de sucre et d'alcool. Dès que l'une d'entre elles s'annulle, la réaction correspondante s'arrête.

2. On a le diagramme suivant :



La variation y' des ferments est égale aux taux de naissance des ferments moins le taux de décès des ferments. Le taux de naissance est $A\,s(t)$ et le taux de décès est $B\,a(t)$. Ainsi

$$y'(t) = A\,s(t) - B\,a(t)$$

Le taux de création d'alcool est proportionnel à la quantité de sucre, ainsi

$$a'(t) = C\,y(t)$$

Le taux sucre détruit est proportionnel à la quantité de ferments, ainsi

$$s'(t) = -D\,y(t)$$

Il en résulte le système suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = A\,s(t) - B\,a(t) \\ a'(t) = C\,y(t) \\ s'(t) = -D\,y(t) \end{cases}$$

3. Il résulte de la première équation du système que

$$y''(t) = A\, s'(t) - B\, a'(t)$$

avec $a'(t) = C\, y(t)$ et $s'(t) = D\, y(t)$, ainsi

$$y''(t) = -AD\, y(t) - BC\, y(t)$$

En notant $\alpha = AD + BC$, il vient

$$y''(t) + \alpha\, y(t) = 0$$

Il est à noter que α est la somme de produits de quantité strictement positives, il est donc strictement positif.

4. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle du second ordre est $X^2 + \alpha = 0$, dont les racines sont $i\sqrt{\alpha}$ et $-i\sqrt{\alpha}$, ainsi les solutions de léquation différentielle sont

$$C_1 \sin(\sqrt{\alpha} t) + C_2 \cos(\sqrt{\alpha} t)$$

où C_1 et C_2 sont deux réels indépendants de t (constantes).

5. On a $\alpha = \frac{1}{200} + \frac{1}{200} = \frac{1}{100}$ donc

$$y(t) = C_1 \sin\left(\frac{1}{10} t\right) + C_2 \cos\left(\frac{1}{10} t\right)$$

et donc

$$y'(t) = \frac{C_1}{10} \cos\left(\frac{1}{10} t\right) - \frac{C_2}{10} \sin\left(\frac{1}{10} t\right)$$

Comme $a(0) = 0$, on a $y'(0) = s(0)$ or $y'(0) = \frac{C_1}{10} \cos 0$ donc

$$C_1 = 10 s(0)$$

Par ailleurs $y(0) = C_2 \cos 0$ donc

$$C_2 = y(0)$$

donc

$$y = 10 s(0) \sin\left(\frac{1}{10} t\right) + y(0) \cos\left(\frac{1}{10} t\right)$$