

Interrogation du 25/03/2008

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre le résultat d'une question pour passer à la question suivante. Le sujet est recto-verso.

Exercice I (1 point)

Donner la commande Maple ou Matlab qui permet de tracer la courbe de la fonction

$$x \mapsto x^2 + 1$$

sur l'intervalle $[-2, 2]$.

Exercice II (9 points)

Considérons le système de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} N' &= N \times (a - bP) \\ P' &= P \times (-d + cN) \end{cases} \quad (1)$$

où a , b , c et d sont des réels strictement positifs et N et P sont deux fonctions. On note $T > 0$ le plus petit réel non nul tel que $(N(T), P(T)) = (N(0), P(0))$ dont l'existence a été constatée en cours (et qui sera démontrée vendredi). On a également indiqué en cours que N était une fonction à valeur strictement positive, ce que l'on pourra utiliser dans cet exercice. On admettra également que N' est continue.

1. Si $P(t)$ est la quantité de poisson d'une certaine espèce au temps t , indiquer ce que modélise le système (1) et la signification de N , a , b , c et d .

2. On cherche à calculer

$$M = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

en fonction de a et de b .

a . Montrer que $\int_0^T \frac{N'(t)}{N(t)} dt = \int_0^T [a - bP(t)] dt$

b . Montrer que $\int_0^T [a - bP(t)] dt = 0$

c . En déduire la valeur de M .

3. Que représente M ?

Exercice III (10 points)

Dans la fabrication du vin, des ferments digèrent le sucre présent dans le jus de raisin et produisent de l'alcool. Cet alcool est toutefois toxique pour les ferments. On notera $y(t)$ la quantité de ferment, $s(t)$ la quantité de sucre et $a(t)$ la quantité d'alcool au temps t . Le temps et les quantités sont données dans un système d'unité *ad hoc*. On se propose de développer un modèle dans lequel

- le taux de naissance des ferments est proportionnel à la quantité de sucre (la constante de proportionnalité sera notée A) ;
- le taux de décès des ferments est proportionnel à la quantité d'alcool (la constante de proportionnalité sera notée B) ;
- le taux de création d'alcool est proportionnel à la quantité de ferments (la constante de proportionnalité sera notée C) et
- le taux de sucre détruit par les ferments est proportionnel à la quantité de ferments (la constante de proportionnalité sera notée D).

1. Les quantités $y(t)$, $s(t)$ et $a(t)$ peuvent-elles être négatives ? Que se passe-t'il si l'une d'entre elles devient nulle ?
2. Indiquer la relation entre les compartiments $y(t)$, $s(t)$ et $a(t)$ et donner trois équations différentielles modélisant le phénomène.
3. Montrer qu'il existe un réel positif α tel que $y'' + \alpha y = 0$.
4. En déduire qu'il existe deux réels C_1 et C_2 tels que

$$y(t) = C_1 \sin(\sqrt{\alpha}t) + C_2 \cos(\sqrt{\alpha}t)$$

5. On supposera désormais qu'il n'y a pas d'alcool à $t = 0$ et que $A = B = 1$ et que $C = D = \frac{1}{200}$. Déterminer C_1 et C_2 en fonction de $y(0)$, $s(0)$.