Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1402 – Introduction au Calcul Scientifique

S4 – Année 2008-2009
Promotion ESILV 2012

Examen du 14/04/2009

Corrigé

Exercice I

1.

a . Le taux de variation de la population, par habitant, est $a - b$, ainsi

$$x'(t) = (a - b)x(t)$$

b . Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. La solution générale de l'équation est

$$x(t) = K \exp((a - b)t)$$

où K est un réel indépendant de t (une constante). Or

$$K = K \exp(0) = x(0) = x_0$$

ainsi $x(t) = x_0 \exp((a - b)t)$.

2.

a . En tenant compte du flux migratoire, on obtient $x'(t) = (a - b)x(t) + c$.

b . L'équation sans second membre a déjà été résolue, nous avons trouvé

$$x(t) = K \exp((a - b)t)$$

Pour la détermination d'une solution particulière de l'équation avec second membre, distinguons deux cas.

Cas 1 : $a \neq b$

La fonction

$$t \mapsto -\frac{c}{a - b}$$

est solution particulère de l'équation avec second membre, ainsi les solutions générales de l'équation avec second membre sont

$$x(t) = K \exp((a - b)t) - \frac{c}{a - b}$$

or

$$x_0 = x(0) = K \exp(0) - \frac{c}{a - b}$$

donc

$$K = x_0 + \frac{c}{a - b}$$

ainsi la solution cherchée est

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{c}{a - b}\right) \exp((a - b)t) - \frac{c}{a - b}$$

Cas 2 : $a = b$

On a $x'(t) = c$ ainsi $x(t) = ct + K$ où K est un réel indépendant de t. En utilisant $x_0 = x(0) = 0c + K$ il vient $K = x_0$ et donc

$$x(t) = x_0 + ct$$

3.

a . L'hypothèse selon laquelle les mouvements de population ne se font qu'avec le pays voisin n'affecte pas la modélisation précédemment réalisée pour le pays donc la population est $x(t)$. En ce qui concerne le second pays, on réalise une modélisation analogue et on tient compte du fait que le flux du second pays est l'opposé du flux dans le premier. On a donc

$$y'(t) = (\alpha - \beta)y(t) - c$$

b . La résolution de cette équation est analogue au travail réalisé dans la question 2b. On a

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y(t) & = & \left(y_0 - \frac{c}{\alpha-\beta}\right) \exp((\alpha-\beta)t) + \frac{c}{\alpha-\beta} & \text{si} \quad a \neq b \\ y(t) & = & y_0 - ct & \text{si} \quad a = b \end{array} \right.$$

4. On remplace c par $c \times (y(t) - x(t))$, il vient

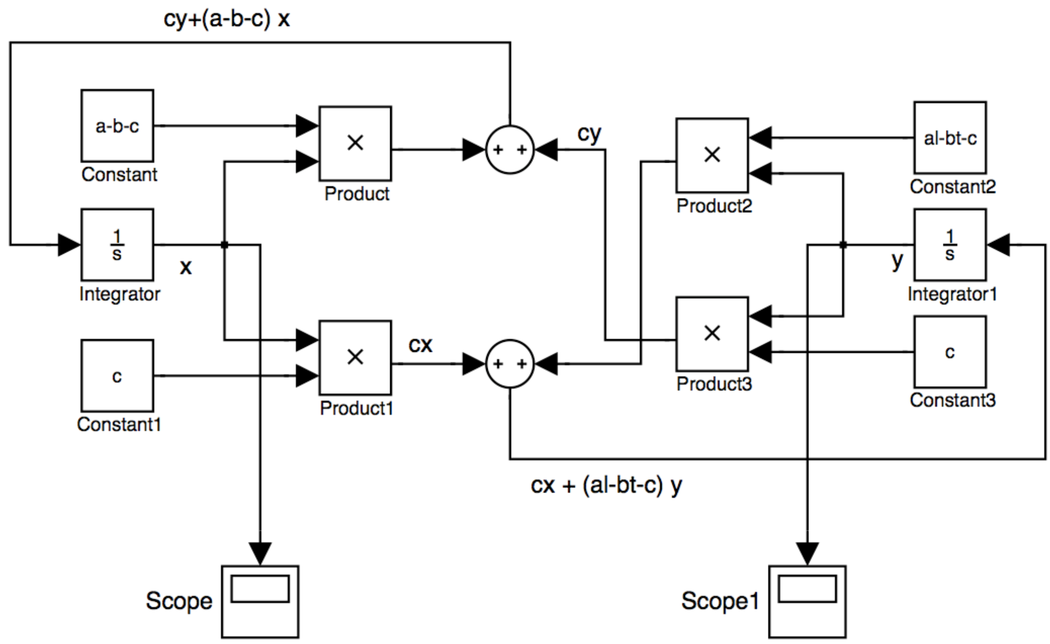
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & (a-b)x(t) + c(y(t) - x(t)) \\ y'(t) & = & (\alpha-\beta)y(t) - c(y(t) - x(t)) \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & (a-b-c)x(t) + cy(t) \\ y'(t) & = & cx(t) + (\alpha-\beta-c)y(t) \end{array} \right.$$

Exercice II

On trouvera ci-dessous le schéma Simulink permettant de simuler le système



Exercice III

1. Nous notons $x(t)$ le pourcentage de la population qui connait le produit. Les personnes qui connaitront le produit à l'instant $t + h$ sont ceux qui le connaissaient à l'instant t auxquelles s'ajoutent les personnes qui l'ont découvert, ces personnes sont une fraction de la population ne connaissant pas le produit à l'instant t, ainsi

$$x(t + h) = x(t) + ah(1 - x(t))$$

ce qui conduit à

$$\frac{x(t + h) - x(t)}{h} = a(1 - x(t))$$

lorsque h tend vers 0, il vient

$$x'(t) = a(1 - x(t))$$

2. Nous considérons l'équation différentielle

$$x'(t) + ax(t) = a$$

obtenue à la question précédente.

- Les solutions générales de l'équation sans second membre sont

$$x(t) = K \exp(-at)$$

- Une solution particulière de l'équation avec second membre est 1

ainsi les solutions générales de l'équation avec second membre sont

$$x(t) = K \exp(-at) + 1$$

La condition initiale $x(0) = 0$ donc $K = -1$, par suite

$$x(t) = 1 - \exp(-at)$$

3. On suppose que le nombre de personnes ayant connaissance du produit, par bouche-à-oreille, et qui s'en souviennent est proportionnel au produit du nombre de personnes qui connaissent le produit (et qui peuvent donc en parler) par le nombre de personnes qui ne le connaissent pas encore (et qui peuvent donc être *convertis*). Le réel positif b est la constante de proportionalité

4. On considère $h > 0$ petit. On rappel que l'on a

$$x(t + h) = x(t) + ha(1 - x(t)) + hbx(t)(1 - x(t))$$

ainsi, on considère l'algorithme suivant

```
x(0) <-  0
N    <-  100 (par exemple)
h    <-  T/N

Pour i variant entre 0 et N-1 faire
  x(i+1) <- x(i) + h*a*(1-x(i)) + h*b*x(i)*(1-x(i))
```

5. Seules les personnes connaissant le produit peuvent l'oublier. On fait l'hypothèse que le nombre de personnes oubliant le produit est proportionnel au nombre de personnes connaissant le produit ; on note c cette constante de proportionalité. On propose le modèle suivant

$$x'(t) \;=\; a\,(1 - x(t)) \;+\; b\,x(t)\,(1 - x(t)) \;-\; c\,x(t)$$