Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1402 – Introduction au Calcul Scientifique

S4 – Année 2008-2009
Promotion ESILV 2012

Examen du 14/04/2009

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices peuvent être traités de manière indépendante. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre le résultat d'une question pour passer à la question suivante. Le sujet est recto-verso.

Exercice I (8.5 points)

1. On considère un pays dans lequel le taux de naissance par habitant est a et le taux de mortalité par habitant est b. On appelle $x(t)$ la population de ce pays au temps t et $x_0 = x(0)$ la population au début de l'étude.

a . Donner l'équation différentielle qui régit l'évolution de la population.

b . Montrer que $x(t) = x_0 \exp((a-b)t)$.

2. On suppose, en outre, qu'il y a un flux migratoire c. S'il y a plus d'immigration dans le pays que d'émigration hors du pays alors $c \geq 0$ sinon $c < 0$.

a . Donner l'équation différentielle qui régit l'évolution de la population.

b . Résoudre l'équation différentielle trouvée.

3. On suppose, en outre, que les migrations de populations ne se font qu'avec un pays voisin. On note $y(t)$ la population du pays voisin et $y_0 = y(0)$, α son taux de naissance et β son taux de mortalité.

a . Donner les équations différentielles qui régissent l'évolution de la population de chacun des pays.

b . Résoudre la ou les équations différentielles trouvées non-déja résolues.

4. En plus des hypothèses précédentes, on suppose que les deux pays considérés ont la même superficie. Les conditions économiques de ces deux pays sont les mêmes et on fait l'hypothèse que le flux migratoire est proportionnel à la différence de population entre ces deux pays (les habitants du pays le plus peuplé ayant tendance à aller dans le pays le moins peuplé). Donner le système d'équations différentielles qui régit l'évolution de la population en fonction du temps. On ne demande pas de résoudre ce système.

Exercice II (3 points)

On considère le système d'équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & (a-b-c)\,x(t) \; + \; c\,y(t) \\ y'(t) & = & c\,x(t) \; + \; (\alpha-\beta-c)\,y(t) \end{array} \right.$$

où a, b, c, α et β sont des réels positifs et avec les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ données. Donner le schéma Simulink permettant de le simuler.

Exercice III (8.5 points)

Une agence de marketing souhaite modéliser l'impact d'une campagne publicitaire pour un produit jusqu'alors totalement inconnu. Cette campagne se fait par affichage, par des spots publicitaires et par des encarts dans la presse. On note $x(t) \in [0,1]$ le pourcentage de la population qui se souvient du produit, où t est le nombre de jours après que la campagne a commencé.

1. Un individu qui ne connait pas encore le produit a une probabilité a de voir une affiche, un spot publicitaire ou un encart dans le journal dans la journée et de se souvenir du produit. Soit $h \in]0,1]$, considérons h jours (par exemple la moitié d'un jour si $h = 1/2$) ; on approximera la probabilité que l'individu voit la campagne et se souvienne du produit au cours de h jour, par ah. On fait les hypothèses suivantes :

(H1) la seule source de connaissance du produit est la campagne publicitaire.

(H2) une fois qu'un individu se souvient du produit, il ne l'oublie pas.

Faire un modèle compartimental et en déduire une équation différentielle dont x est solution.

2. Montrer que

$$x(t) = 1 - \exp(-at)$$

3. On supprime désormais l'hypothèse (H1). On suppose au contraire que les personnes parlent du produit à leurs proches et on considère la modélisation suivante :

$$x'(t) \; = \; a\,(1-x(t)) \; + \; b\,x(t)\,(1-x(t))$$

Expliquer les hypothèse faites dans ce modèle. On ne demande pas de résoudre l'équation différentielle.

4. Ecrire un algorithme, se basant sur la méthode d'Euler, permettant de résoudre numériquement l'équation introduite dans la question 3, sur un intervalle $[0,T]$ avec $T > 0$ donné.

5. On supprime désormais l'hypothèse (H2). On suppose que les personnes peuvent oublier le produit. Proposer un modèle intégrant cette hypothèse et justifier votre modèle.