

## Feuille d'exercices 2

*Utilisation de Maple*

### Exercice I

Au moyen de Maple, résoudre l'équation différentielle  $x' = a(1 - x(t))$  avec la condition initiale  $x(0) = 0$ . Tracer le résultat obtenu pour  $a = 0.01$ ,  $a = 0.1$  et  $a = 0.5$ .

### Exercice II

Soit  $a, b, c, d, e, f$  six réels. Au moyen de Maple, calculer les puissances successives de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Exercice III

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Considérons

$$M = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ -1 + 3\alpha & 3\alpha & -3 & 4 - 3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Dans cet exercice, on utilisera le package `LinearAlgebra` de Maple dont on lira la documentation via la commande `?LinearAlgebra`

1. Déterminer une matrice de Jordan<sup>1</sup>  $J$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $M = P^{-1}JP$ .
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de  $M$  et de  $J$ .
3. On considère désormais  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Déterminer les valeurs propres de  $M^n$  pour  $n = 10$  et  $n = 100$ .

---

<sup>1</sup>Camille Jordan, mathématicien français du XIX et XXe siècle, est connu pour son travail en théorie des groupes et pour la forme qui porte son nom en algèbre matricielle. Il convient de ne pas le confondre avec son homonyme allemand Wilhelm Jordan qui a donné son nom à la méthode de Gauss-Jordan.



Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922)

## Exercice IV

Soit  $a$  et  $b$  deux réels et  $P$  le polynôme défini par  $P(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + 2x + b$ . En utilisant Maple, déterminer  $a$  et  $b$  tels que  $P(1 + i) = 0$ .

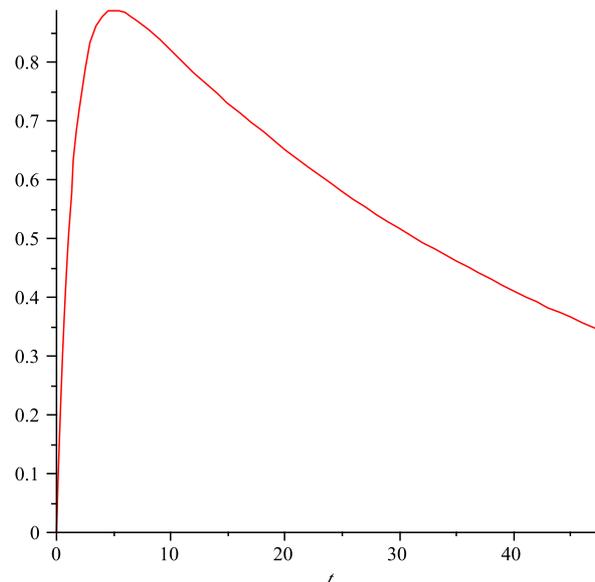
## Exercice V

On souhaite modéliser l'absorption d'un comprimé. Le but de cet exercice est de trouver la quantité de médicament dans le sang au bout de  $t$  heures.

On note  $x(t)$  la quantité de médicament dans l'appareil digestif au temps  $t$ , exprimé en heures. On note  $x(0) = x_0$  la quantité de médicament avalé dans le comprimé. Progressivement, le médicament passe dans le sang. Le taux de médicament qui quitte l'appareil digestif et qui entre dans le sang est proportionnel à la quantité de médicament dans l'appareil digestif. La constante de proportionnalité sera notée  $k_1$ .

Initialement, il n'y a pas de médicament dans le sang. Au fur et à mesure qu'il arrive de l'appareil digestif, une partie du médicament est éliminé par les reins. La quantité de médicament éliminée par les reins est proportionnelle à la quantité de médicament dans le sang. On note  $k_2$  cette constante de proportionnalité et  $y(t)$  la quantité de médicament dans le sang au temps  $t$ , exprimé en heures.

1. Ecrire l'équation différentielle dont  $x$  est solution et la résoudre à la main et avec Maple.
2. Ecrire l'équation différentielle dont  $y$  est solution et la résoudre avec Maple.
3. Dans le cas d'un antihistaminique (médicament contre les allergies), les constantes  $k_1$  et  $k_2$  sont respectivement 0.6931 et 0.0231. Vérifier avec Maple que le taux de médicament dans le sang est représenté par cette courbe.



4. Un décongestionnant a des constantes  $k_1$  et  $k_2$  respectivement égales à 1.3860 et 0.1386. Tracer la courbe représentant la quantité de médicament dans l'appareil digestif et dans le sang sur une période de 24 heures.