Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1402 – Introduction au Calcul Scientifique

S4 – Année 2008-2009
Promotion ESILV 2012

Feuille d'exercices 1

Modèles Compartimentaux

Exercice I

La plupart des atomes de carbone ont un noyau avec 6 protons et 6 neutrons, il sont appelés carbone 12. Dans les basses couches de la stratosphère et les hautes couches de la troposphère, une réaction entre les neutrons et l'azote conduit à la création d'atomes de carbone avec 6 protons et 8 neutrons, appelés carbone 14.

Il y a environ $10^{-10}\%$ d'atomes de carbone 14 parmi les atomes de carbone présents dans l'air que les plantes et les animaux respirent. Ces plantes et animaux assimilent le carbone 12 et le carbone 14 de manière indifférenciée. Ainsi, durant la vie de la plante ou de l'animal, la proportion de carbone 14 dans son organisme est égale à la proportion de carbone 14 dans l'atmosphère: 10^{12} atomes de carbone pour un atome de carbone 14.

1. L'atome de carbone 14 est instable : il a tendance à dégènérer en atome d'azote. Il est raisonable de supposer que la quantité d'atomes de carbone 14 qui dégènérent est proportionnelle à la quantité d'atomes de carbone 14 présente dans l'organisme. Ce coefficient de proportionalité sera noté λ.

On note $X(t)$ la quantité de carbone 14 présente dans l'organisme, exprimée en grammes où t est le nombre d'années après que l'organisme a cessé de respirer. Donner une équation différentielle dont X est solution.

2. Montrer que

$$X(t) = X(0)\ \exp(-\lambda t)$$

3. En 1949, Willard Libby[1] et son équipe estiment que la quantité de carbone 14 est divisée par deux au bout de 5568 ans, dans un organisme ayant cessé de respiré. Calculer λ.

4. Plus récemment on a estimé à 5730 ans le temps nécessaire pour que la quantité de carbone 14 soit divisée par deux dans un organisme ayant cessé de respiré. Déterminer λ.

5. Dans les grottes de Lascaux, on a trouvé un bois de renne qui était utilisé par les habitants. On détermine que la quantité de carbone 14 dans ce bois est le dixième de la quantité que l'on trouve dans la matière vivante. A quelle date (approximative) le bois fut-il coupé ?

[1] Willard Libby est un chimiste amricain du XXe siècle, connu pour son rôle dans le développement de la méthode de datation par le carbone 14. Il obtint, pour ces travaux, le prix Nobel de chimie en 1960.

Willard Frank Libby (1908–1980)

Exercice II

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = \frac{1}{2}[1 - y(t)]$$

et la condition initiale $y(0) = 0$.

1. Au moyen de la méthode d'Euler donner une approximation de la solution sur l'intervalle $[0, 30]$ avec un pas $h = 1$ et $h = 0.1$.

2. Résoudre l'équation différentielle et comparer avec l'approximation réalisée à la question précédente.

Exercice III

Une agence de marketing souhaite modéliser l'impact d'une campagne publicitaire pour un produit jusqu'alors totalement inconnu. Cette campagne se fait par affichage, par des spots publicitaires et par des encarts dans la presse. On note $x(t) \in [0, 1]$ le pourcentage de la population qui se souvient du produit, où t est le nombre de jours après que la campagne a commencé.

1. Un individu qui ne connait pas encore le produit a une probabilité a de voir une affiche, un spot publicitaire ou un encart dans le journal dans la journée et de se souvenir du produit. Soit $h \in]0, 1]$, considérons h jours (par exemple la motié d'un jour si $h = 1/2$) ; on approximera la probabilité que l'individu voit la campagne et se souvienne du produit au cours de h jour, par ah. On fait les hypothèses suivantes :

- la seule source de connaissance du produit est la campagne publicitaire.
- une fois qu'un individu se souvient du produit, il ne l'oublie pas.

Faire un modèle compartimental et en déduire une équation différentielle dont x est solution.

2. Montrer que

$$x(t) = 1 - \exp(-at)$$

3. Simuler l'évolution du pourcentage de la population connaissant le produit, sur une période de 30 jours, lorsque $a = 0.01$, lorsque $a = 0.1$ et lorsque $a = 0.5$. On suppose désormais que $a = 0.5$.

4. On suppose que le nombre de personnes qui achetent le produit est proportionnel au nombre de personnes qui se souviennent de ce produit. Notons $d \in [0, 1]$ le quotient entre les premiers et les seconds. On observe que $d = 0.1$.

L'industriel commercialisant le produit voudrait savoir combien de jours il doit faire sa campagne. Il contact Devinci Engineering pour avoir un conseil.

Notons $N = 10^6$ le nombre d'individus dans la population, $b = 30$ le bénéfice réalisé par unités vendues (en euros), $c = 300000$ le montant qu'il a payé à l'agence de marketing pour lancer la campagne (en euros) et $e = 100000$ le coût journalier de la campagne (en euros).

Quel conseil donnez-vous à l'industriel ?