Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2007-2008
Promotion ESILV 2012

Interrogation du 14/12/2007

Corrigé

Exercice I

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs. Considérons

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{u_n} &= \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{(n^3)}} \\ &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \\ &= \exp\left(n^2\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right)\end{aligned}$$

Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1-x)$. La fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et $f'(x)=\frac{-1}{1-x}$. On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-1$$

or $\lim\frac{1}{n^2}=0$ donc

$$\lim\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)-ln(1-0)}{\frac{1}{n^2}-0}=-1$$

ainsi

$$\lim\sqrt[n]{u_n}=e^{-1}=\frac{1}{e}<1$$

Le critère de Cauchy s'applique et donne la convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$$

2. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ converge donc $\lim u_n=0$.

Exercice II

Remarquons que

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha\, n^\beta}=\frac{(-1)}{n^{\alpha+\beta}}$$

et notons u_n cette quantité.

1. On a $|u_n|=\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}$; la série associée est donc de Riemann. Elle converge si et seulement si $\alpha+\beta>1$.

2. Si $\alpha+\beta \leq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ ne converge pas vers 0, ainsi la série associée diverge.

Supposons que $\alpha+\beta > 0$ alors $|u_n|$ est décroissante. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée puisque pour tout entier naturel n non nul, on a

$$u_n u_{n+1} = \frac{(-1)^n(-1)^{n+1}}{n^{\alpha+\beta}(n+1)^{\alpha+\beta}} = \frac{-1}{n^{\alpha+\beta}(n+1)^{\alpha+\beta}} < 0$$

Le critère concernant les séries alternées s'applique. On a $\lim u_n = 0$ donc la série associée converge.

3. La suite est sommable lorsque la série associée est absolument convergente, ainsi (u_n) est sommable si et seulement si $\alpha+\beta > 1$.

Exercice III

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A_n$. Soit $d_1 = |x-u_n|$ et $d_2 = |x+u_n|$ alors $d_1 > 0$ et $d_2 > 0$. Notons $\varepsilon = \min\{d_1, d_2\}$ alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A_n$ donc A_n est un voisinage de x. Il en résulte que A_n est voisinage de chacun de ses points donc que c'est un ouvert.

2. Dans le cas général on n'a pas $A_n \subset A_{n+1}$ car une suite qui tend vers $+\infty$ peut ne pas être croissante. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2+2(-1)^n+n$ tend vers $+\infty$ puisqu'elle est minorée par n et donne un contre-exemple à l'inclusion indiquée puisque $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraine $u_n \geq |x|$. Ainsi $u_N \geq |x|$ donc $x \in]-u_n, u_n[= A_N$ ainsi $x \in B$. Il en résulte que $\mathbb{R} \subset B$. Il est par ailleurs trivial que $B \subset \mathbb{R}$, ainsi $B = \mathbb{R}$.

4. L'ensemble B est une réunion d'ensemble ouverts, c'est donc un ouvert.