Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2007-2008
Promotion ESILV 2012

Interrogation du 14/12/2007

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (6 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{(n^3)}$$

1. Quelle est la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2. En déduire $\lim u_n$.

Exercice II (6.5 points)

Soit α et β deux réels. On considère la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha\, n^\beta}$$

1. Discuter selon α et β la convergence absolue de la série.

2. Discuter selon α et β la convergence de la série.

3. Discuter selon α et β la sommabilité de la suite associée à cette série.

Exercice III (7.5 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive qui tend vers $+\infty$. Pour tout entier naturel n on note

$$A_n =]-u_n, u_n[$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que A_n est ouvert sans invoquer le simple fait que c'est un intervalle ouvert.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. A-t'on forcément $A_n \subset A_{n+1}$? Faire une démonstration ou donner un contre-exemple.

3. Soit $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $B = \mathbb{R}$.

4. Déduire de la question 1 si B est un ouvert ou non.