Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2007-2008
Promotion ESILV 2012

Interrogation du 13/11/2007

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées. Le sujet est recto-verso.

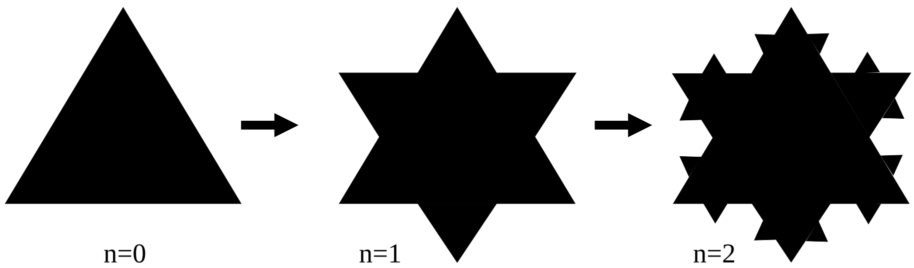
Exercice I (10 points)

On part d'un domaine délimité par un triangle équilatéral. Ce domaine est noté D_0.

i) On divise chaque segment du bord en trois segments de longueurs égales.

ii) On construit des triangles équilatéraux (vers l'extérieur) ayant pour base les segments du milieu obtenus en (i). On ajoute au domaine, les domaines délimités par ces triangles.

On obtient ainsi D_1. On répète (i) et (ii), on obtient alors D_2. Le graphe ci-dessous représente D_n pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.



On note D_n le domaine obtenu et en répétant n fois le processus en partant de D_0. En répétant indéfiniment le processus (i) et (ii) (c'est à dire une infinité de fois) on obtient le *Flocon de von Koch.*

1. Notons u_n l'aire de l'un des triangles qui a été ajouté à l'itération n et v_n le nombre de triangles qui ont étés ajoutés à cette itération. Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n$ pour $n \geq 0$. Donner une relation entre v_{n+1} et v_n pour $n \geq 1$.

2. Soit w_n l'aire de $D_n \setminus D_{n-1}$, pour $n \geq 1$. Montrer que

$$w_n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} w_1$$

3. Que vaut w_1 si l'aire du domaine D_0 est 1 ?

4. En déduire que si l'aire du domaine D_0 est 1 alors l'aire du Flocon de von Koch est

$$1 + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

5. Calculer l'aire du Flocon de von Koch issue d'un domaine D_0 d'aire 1.

6. Le périmètre du Flocon de von Koch est-il borné ?

Exercice II (5 points)

La série suivante est-elle convergente ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{2^n}$$

Exercice III (5 points)

Redémontrer ce résultat du cours : "Si $s > 1$ alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ converge."