Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2007-2008
Promotion ESILV 2012

Interrogation du 15/10/2007

Corrigé

Exercice I

1. Soit $A \in \mathbb{R}$

- Si $A > 0$ alors posons[1] $N = \mathrm{E}(\ln(\exp(A) - 1)) + 1$. On a alors

$$\begin{array}{lll} n \geq N & \Rightarrow & n \geq \ln(\exp(A) - 1) \quad \text{donc} \\ n \geq N & \Rightarrow & \exp(n) \geq \exp(A) - 1 \quad \text{donc} \\ n \geq N & \Rightarrow & \exp(n) + 1 \geq \exp(A) \quad \text{donc} \\ n \geq N & \Rightarrow & \ln(\exp(n) + 1) \geq A \end{array}$$

- Si $A \leq 0$ alors $\ln(1+\exp(n)) \geq A$ est trivial. En effet $1+\exp(n) > 1$ donc $\ln(1+\exp(n)) > 0$ alors que $A \leq 0$. Posons $N = 0$.

Nous avons démontré que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$ ainsi $\lim u_n = +\infty$.

2. La suite (u_n) n'est pas de Cauchy puisqu'elle n'est pas convergente.

Exercice II

1. Notons (v_n) la suite à étudier. Pour $n \neq 0$, on a

$$n \times \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n+1}}{n^2 - n + 1} = n \times \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}{n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

or $\lim(1 + 2/n^2) = 1$ donc $\lim \sqrt{1+2/n^2} = 1$; $\lim(1/n + 1/n^2) = 0$ donc $\lim \sqrt{1/n+1/n^2} = 0$; $\lim(1 - 1/n + 1/n^2) = 1$ donc

$$\lim \left(\frac{\sqrt{1+2/n^2} - \sqrt{1/n+1/n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) = 1$$

ce qui démontre que $\lim v_n = 1$.

2. Soit (P_n) la proposition $n \leq 2^n$.

- (P_1) est vraie puisque $1 \leq 2$.
- Supposons (P_n) vraie alors $n \leq 2^n$ donc $2n \leq 2^{n+1}$. Si $n \geq 1$ alors $n+1 \leq 2n$ donc $n + 1 \leq 2^{n+1}$ donc (P_{n+1}) est vraie.

On a (P_1) vraie et $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$ pour $n \geq 1$. La récurrence permet de conclure que (P_n) est vraie pour tout $n \geq 1$. On remarquera que (P_n) est également vraie pour $n = 0$ mais il n'est pas possible d'établir ce résultat par la récurrence pusique l'hérédité n'est vraie que pour $n \geq 1$.

[1] En toute rigueur, il faut poser $N = \max\{0, \mathrm{E}(\ln(\exp(A) - 1)) + 1\}$ pour se premunir contre le cas où N serait négatif

3. Pour $n \neq 0$, on a

$$\frac{3^n}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n+1}} = \frac{3^n(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n+1})}{(n^2+2)-(n+1)} = \frac{3^n}{n}v_n$$

où (v_n) est la suite étudiée dans la question 1.

En vertu de la question 2, on a $n \leq 2^n$ pour $n \geq 1$ ce qui entraine les deux propositions suivantes

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2^n}, \text{ pour } n \geq 1$$

$$\frac{3^n}{n} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n, \text{ pour } n \geq 1$$

or $\lim(3/2)^n = +\infty$ donc $\lim 3^n/n = +\infty$. Comme $\lim v_n = 1$, on en déduit que $\lim u_n = +\infty$

Exercice III

1. Si $x \neq 0$ alors on a $|x| \geq \varepsilon$ pour $\varepsilon = |x|/2 > 0$; ainsi

$$(x \neq 0) \;\Rightarrow\; (\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geq \varepsilon)$$

Par contraposition, on a

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon) \;\Rightarrow\; (x = 0)$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Si (u_n) converge vers l alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$ et $n \geq N$ alors

$$\begin{array}{rcl} |l - l'| & = & |u_n - l' + l - u_n| \\ & = & |u_n - l'| + |u_n - l| \\ & < & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ |l - l'| < \varepsilon$$

La question précédente permet de conclure que $l = l'$.