Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S1 – Année 2007-2008
ESI CS 1102 – Analyse I — Promotion ESILV 2012

Interrogation du 15/10/2007

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (6 points)

1. En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim \left(\ln\left(1+e^n\right)\right) = +\infty$$

2. Cette suite est-elle de Cauchy ?

Exercice II (7.5 points)

1. Montrer que

$$\lim \left(n \times \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n+1}}{n^2-n+1} \right) = 1$$

2. Montrer, par récurrence, que $n \leq 2^n$ à partir d'un rang que l'on précisera.

3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{3^n}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n+1}}$$

Exercice III (6.5 points)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon) \ \Rightarrow\ (x = 0)$$

2. En utilisant la définition de la limite, en déduire que la limite d'une suite convergente est unique, c'est-à-dire que si (u_n) converge vers l et vers l' alors $l = l'$.