

Examen du 29/01/2008

Corrigé

Exercice I

On a $A =] - \infty, 0] \cup \{2\} \cup]4, +\infty[$

1. L'ensemble A n'est pas ouvert puisqu'il n'est pas voisinage de 0 (ou de 2) qui est pourtant un élément de A .

L'ensemble A n'est pas fermé puisque son complémentaire dans \mathbb{R} est $]0; 2[\cup]2; 4]$ qui n'est pas ouvert puisqu'il n'est pas voisinage de 4 qui est l'un de ses points.

L'ensemble A n'est pas compact puisqu'il n'est pas fermé (ni borné, du reste).

2. On a

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{A} &=] - \infty, 0[\cup]4, +\infty[\\ \bar{A} &=] - \infty, 0] \cup \{2\} \cup [4, +\infty[\\ \partial A &= \{0; 2; 4\} \\ A' &=] - \infty, 0] \cup [4, +\infty[\\ A^* &= \{2\}\end{aligned}$$

Exercice II

1. La proposition est FAUSSE comme le montre le contre-exemple suivant :

$$q = \frac{1}{2}, \quad u_n = q^n$$

La suite est strictement positive mais la série associée est convergente puisqu'elle est géométrique de raison q avec $|q| < 1$.

2. La proposition est FAUSSE comme le montre le contre-exemple suivant :

$$u_n = \frac{1}{n+2}$$

On a

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{(n+2)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{n} \ln(n+2)\right)}$$

Or $\frac{\ln(n+2)}{n} > 0$ donc $\exp\left(\frac{1}{n} \ln(n+2)\right) > 1$ donc

$$\sqrt[n]{u_n} < 1$$

par ailleurs (u_n) est équivalente à $\frac{1}{n}$ dont la série associée est de Riemann divergente ($s = 1 \leq 1$). Les suites considérées étant positives et en vertu du critère d'équivalence, la série associée à (u_n) diverge.

3. Démontrons que cette proposition est VRAIE. Soit (u_n) une suite donc la série associée converge. La suite (u_n) converge vers 0. *Ab absurdo* si $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ alors $1 = \lim u_n \frac{1}{u_n} = 0$ ce qui est impossible. Ainsi $\frac{1}{u_n}$ ne converge pas vers 0 donc la série associée diverge.

4. La proposition est FAUSSE comme le montre le contre-exemple suivant :

$$A =]0; 1[, \quad B = [1; 2[$$

L'ensemble A est un ouvert et B n'est pas ouvert, pourtant alors $A \cup B =]0; 2[$ est un ouvert.

Exercice III

1. Soit $u_n = \left| \frac{x^n}{n!} \right|$. La suite est à termes strictement positifs. Appliquons le critère de d'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1}$$

ainsi $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ donc S est absolument convergente et *a fortiori* convergente.

2. La variable n est muette, S ne dépend pas de n . En revanche x est un paramètre : la valeur de S en dépend¹.

Exercice IV

1. Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$N = \max\left\{0, -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2008}\right\}$$

$$\text{alors } n \geq N \Rightarrow n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2008}$$

$$\text{donc } n \geq N \Rightarrow n \ln 2008 > -\ln \varepsilon$$

$$\text{donc } n \geq N \Rightarrow 2008^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{donc } n \geq N \Rightarrow \frac{1}{2008^n} < \varepsilon$$

$$\text{donc } n \geq N \Rightarrow \left| \frac{1}{2008^n} \right| < \varepsilon$$

ce qui établit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left| \frac{1}{2008^n} \right| < \varepsilon$$

donc $\lim \frac{1}{2008^n} = 0$.

2. Soit x et y des réels tels que $x < y$. Notons $\varepsilon = y - x > 0$. Comme $\lim \frac{1}{2008^n} = 0$ il existe un entier naturel q tel que $n \geq q$ entraîne $\frac{1}{2008^n} < \varepsilon$. En particulier

$$\frac{1}{2008^q} < \varepsilon$$

Cet entier n'est pas unique car tout entier plus grand satisfait également l'inéquation.

¹On pourrait démontrer que la série converge vers e^x

3. Sans perte de généralité, on peut supposer $x < y$.

- Supposons $0 < x < y$. Soit q tel que $\frac{1}{2008^q} < y - x$ Notons $p = E(2008^q x) + 1$, on a $p \leq 2008^q x + 1 < p + 1$ donc $p - 1 \leq 2008^q x < p$ ainsi

$$\frac{p}{2008^q} - \frac{1}{2008^q} \leq x < \frac{p}{2008^q}$$

comme $\frac{1}{2008^q} + x < y$, il vient $x < \frac{p}{2008^q} < y$.

- Supposons $x < y < 0$. De manière analogue on a $x < -\frac{p}{2008^q} < y$ pour q fourni par la question précédente et $p = E(2008^q(-y)) + 1$.
- Supposons $x \leq 0 \leq y$. Ce cas est trivial : en prenant $p = 0$, on a $x < \frac{p}{2008^q} < y$.

On a bien démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}, \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, x \leq \frac{p}{2008^q} \leq y$$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Posons $x = a - \varepsilon$ et $y = a + \varepsilon$. En vertu de la question précédente, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $\frac{p}{2008^q} \in]x, y[$, ainsi $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$ ce qui établit que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

donc $\forall a \in \mathbb{R}, a \in \overline{A}$ donc $\mathbb{R} \subset \overline{A}$. Comme, par ailleurs $\overline{A} \subset \mathbb{R}$ on en déduit $\overline{A} = \mathbb{R}$.