Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S1 – Année 2007-2008
ESI CS 1102 – Analyse I — Promotion ESILV 2012

Examen du 29/01/2008

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Les résultats d'une question peuvent être admis pour passer à la question suivante. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées sauf pour la question 2 de l'exercice I.

Exercice I (4 points)

Soit $A =]-\infty, 0] \cup]4, +\infty[\cup \{-2; 2\}$

1. L'ensemble A est-il ouvert ? Est-il fermé ? Est-il compact ?

2. Indiquer, sans justifier, ce que valent les ensembles $\mathring{A}$, $\overline{A}$, ∂A, A' et A^*.

Exercice II (6 points)

Pour chaque proposition suivante, dire si elle est vraie ou fausse et donner un démonstration ou un contre-exemple.

1. Si pour tout entier naturel n on a $u_n > 0$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs et que pour tout entier naturel n on a $\sqrt[n]{u_n} < 1$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

3. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ diverge.

4. Soit A et B des parties disjointes de $\mathbb{R}$. Si A est un ouvert et B n'est pas ouvert alors $A \cup B$ n'est pas ouvert.

Exercice III (4 points)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Considérons

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

1. Cette série est-elle absolument convegente ? Est-elle convergente ?

2. S dépend-il de n ? de x ?

Exercice IV (6 points)

1. En utilisant la définition de la limite, démontrer que

$$\lim \frac{1}{2008^n} = 0$$

2. En déduire que pour tous réels x et y tels que $x < y$, il existe un entier naturel q tel que

$$\frac{1}{2008^q} < y - x$$

Cet entier q est-il unique ?

3. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{x\},\ \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ x \leq \frac{p}{2008^q} \leq y$$

4. Considérons l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{p}{2008^q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

Déterminer $\overline{A}$.