

Correction des exercices de la feuille 6

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice III

1. On a

$$\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ$$

or on a vu que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, en outre $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^\circ$ donc pour une partie E de \mathbb{R} on a $E \setminus (A \cup B)^\circ \subset E \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})$. En particulier pour $E = \overline{A} \cup \overline{B}$, il vient

$$\begin{aligned} \partial(A \cup B) &\subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}) \\ &\subset (\overline{A} \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})) \cup (\overline{B} \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})) \\ &\subset (\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}) \cup (\overline{B} \setminus \overset{\circ}{B}) \\ &\subset (\partial A) \cup (\partial B) \end{aligned}$$

En revanche, l'inclusion réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple suivant :

A	B	$A \cup B$	∂A	∂B	$(\partial A) \cup (\partial B)$	$\partial(A \cup B)$	Conclusion
$[1; 3]$	$[2; 4]$	$[1; 4]$	$\{1; 3\}$	$\{2; 4\}$	$\{1; 2; 3; 4\}$	$\{1; 4\}$	$(\partial A) \cup (\partial B) \not\subset \partial(A \cup B)$

2. Dans le cas général, il n'y a ni inclusion dans un sens, ni d'en l'autre ; comme le montrent les contre-exemples suivants :

A	B	$A \cap B$	∂A	∂B	$(\partial A) \cap (\partial B)$	$\partial(A \cap B)$	Conclusion
\mathbb{R}	$\{1\}$	$\{1\}$	\emptyset	$\{1\}$	\emptyset	$\{1\}$	$\partial(A \cap B) \not\subset (\partial A) \cap (\partial B)$
\mathbb{Q}	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	\emptyset	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\emptyset	$(\partial A) \cap (\partial B) \not\subset \partial(A \cap B)$

Exercice IV

1. Dans le cas général, il n'y a ni inclusion dans un sens, ni d'en l'autre ; comme le montrent les contre-exemples suivants :

A	$\overset{\circ}{A}$	∂A	$\partial(\overset{\circ}{A})$	$(\partial \overset{\circ}{A})$	Conclusion
$[1; 2]$	$]1; 2[$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2\}$	\emptyset	$\partial(\overset{\circ}{A}) \not\subset (\partial \overset{\circ}{A})$
$\mathbb{Q} \cap [1; 2]$	\emptyset	$[1, 2]$	\emptyset	$\{1; 2\}$	$(\partial A) \not\subset \partial(\overset{\circ}{A})$

2. Commençons par remarquer que l'adhérence de tout ensemble est un fermé. En effet pour $E \subset \mathbb{R}$ on a $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \overline{E} \cap (\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{E}) = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{E}}$ est l'intersection de deux fermés. En outre $\partial \overline{A} = \overline{\overline{A}} \setminus \overset{\circ}{\overline{A}}$, or $A \subset \overline{A}$ entraîne $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$ ainsi $\partial \overline{A} \subset \overline{A} \setminus \overset{\circ}{\overline{A}} = \partial A$. La remarque préliminaire permet de conclure que

$$\partial(\overline{A}) \subset \partial A$$

En revanche, l'inclusion réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple suivant :

A	\overline{A}	∂A	$\partial(\overline{A})$	$(\partial \overline{A})$	Conclusion
\mathbb{R}^*	\mathbb{R}	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	$(\partial A) \not\subset \partial(\overline{A})$

3. La réponse est non comme le montre $A = [0; 1] \cap \mathbb{Q}$, on a alors $\partial A = [0; 1]$ et $\partial \partial A = \{1; 2\}$.

Exercice V

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \overline{A}$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on a

$$]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cap A \neq \emptyset$$

donc $x \in A^n$.

2. Soit $y \in A^n$ alors

$$]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}[\cap A \neq \emptyset$$

Soit alors x dans cette intersection, on a

$$y + \frac{1}{n} > x \quad \text{et} \quad y - \frac{1}{n} < x$$

donc

$$y \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$$

ainsi

$$y \in \cup_{x \in A}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$$

donc

$$A^n \subset \cup_{x \in A}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$$

Réciproquement, soit $y \in \cup_{x \in A}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ alors il existe $x \in A$ tel que $y \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ donc $x + \frac{1}{n} > y$ et $x - \frac{1}{n} < y$ donc $]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}[\cap A \neq \emptyset$ donc $y \in A^n$. Conclusion :

$$A^n \subset \cup_{x \in A} \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[$$

3. Selon la question précédente, A^n est une réunion d'ouverts. Donc A^n est un ouvert.

4. Selon la question 1, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\overline{A} \subset A^n$ donc

$$\overline{A} = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} A^n$$

5. Soit A un fermé. Alors $A = \overline{A}$. Selon la question précédente on a alors

$$A = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} A^n$$

Selon la question 3, tous les A^n sont des ouverts. Par ailleurs \mathbb{N}^* est dénombrable, en conséquence A est l'intersection dénombrable d'ensembles fermés.

Cela n'est plus vrai si on remplace dénombrable par fini. Il suffit de prendre comme contre exemple n'importe quel fermé qui n'est pas ouvert (c'est-à-dire n'importe quel fermé qui n'est ni \mathbb{R} ni \emptyset) en effet l'intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Exercice VI

1. Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Comme $x \in \overline{B}$, il existe (u_n) suite d'éléments de B qui converge vers x . D'autre part, comme $x \in A$ et que A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Comme $\lim u_n = x$, il existe un rang N tel que $n > N$ entraîne $|u_n - x| < \varepsilon$. Donc pour $n > N$ on a $u_n \in A$. Par suite $u_n \in A \cap B$. Il existe donc une suite d'éléments de $A \cap B$ (par exemple la suite extraite de (u_n) des termes dont l'indice est strictement supérieur à N) qui converge vers x . Donc $x \in \overline{A \cap B}$. Ainsi $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

2. L'inclusion $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ n'est pas vraie sans l'hypothèse A ouvert comme le montre le contre-exemple suivant : $A =]0, 1]$ et $B =]1, 2[$.
3. Il suffit de prendre $A =]0, 2[\cup]3, 4[$ et $B =]1, 3[$.

Exercice VII

1. L'élément x appartient à $(A \cup B)^*$ implique les 6 lignes suivantes :

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap (A \cup B) &= \{x\} \\ \exists \varepsilon > 0, (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A) \cup (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap B) &= \{x\} \\ \exists \varepsilon > 0, (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A) = \{x\} \text{ ou } (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap B) &= \{x\} \\ x \in A^* \text{ ou } x \in B^* & \\ x \in A^* \cup B^* & \end{aligned}$$

Ainsi $(A \cup B)^* \subset A^* \cup B^*$. L'inclusion réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple suivant

$$A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

en effet $A^* = \emptyset$ et $B^* = \emptyset$ donc $A^* \cup B^* = \emptyset$ pourtant $(A \cup B)^* = \mathbb{R}$.

2. Soit $x \in (A^* \cap B^*)$ alors $x \in A^*$ et $x \in B^*$ donc

$$\begin{cases} \exists \varepsilon_1 > 0,]x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1[\cap A = \{x\} \\ \exists \varepsilon_2 > 0,]x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2[\cap B = \{x\} \end{cases}$$

posons alors $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap (A \cap B) = \{x\}$$

donc $x \in (A \cap B)^*$. Ainsi $A^* \cap B^* \subset (A \cap B)^*$. L'inclusion réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple suivant

$$A = \{0\}, B = \mathbb{R}$$

en effet $A^* = A$ et $B^* = \emptyset$ donc $A^* \cap B^* = \emptyset$ pourtant $(A \cap B)^* = A^* = \{0\}$.