Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2007-2008
Promotion ESILV 2012

# Feuille d'exercices 6

*Interieur, Adhérence, Frontière, Ensemble dérivé, Points isolés*

## Exercice I

Pour chacun des ensembles suivants, indiquez la frontière, l'ensemble dérivé et les points isolés de l'ensemble.

$$
\begin{array}{lllllllll}
A & = & \cup_{n=1}^{+\infty}\{\frac{1}{n}\} & B & = & A\cup\{0\} & C & = & ]0,1]\cup\{0;2;4\} \\
D & = & [1,2] & E & = & ]0,1[\cup\{2\} & F & = & ]-\infty,0]\cup\{-1;2\} \\
G & = & \mathbb{Q} & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[ \\
J & = & ]-1,0[\cup]0,1[ & K & = & \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q} & L & = & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

## Exercice II

On dit que $A\subset\mathbb{R}$ est rare si $\overset{\circ}{\overline{A}}=\emptyset$, et que $B$ est de la première catégorie de Baire[1] (ou encore un ensemble maigre) s'il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles rares.

**1.** Donner un exemple d'ensemble rare et un exemple d'ensemble de la première catégorie de Baire.

**2.** L'intersection de deux ensembles de la première catégorie de Baire est-il un un ensembles de la première catégorie de Baire ? Qu'en est-il de la réunion ?

## Exercice III

Soient $A\subset\mathbb{R}$ et $B\subset\mathbb{R}$.

**1.** Comparer $\partial(A\cup B)$ et $(\partial A)\cup(\partial B)$

**2.** Comparer $\partial(A\cap B)$ et $(\partial A)\cap(\partial B)$

[1] René Baire, mathématicien français, de la fin du XIXe siècle et du début du XXe siècle, travailla sur de nombreux domaines et en particulier la théorie des fonctions et le concept de limite.

René-Louis Baire (1874-1932)

## Exercice IV

Soit $A \subset \mathbb{R}$

**1.** Comparer $\partial(\mathring{A})$ et $\overset{\circ}{(\partial A)}$.

**2.** Comparer $\partial(\overline{A})$ et $\overline{(\partial A)}$.

**3.** A-t'on forcement $\partial(\partial A) = \emptyset$ ?

## Exercice V

Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$A^n = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[ \cap A \neq \emptyset \right\}$$

**1.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{A} \subset A^n$

**2.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \cup_{x \in A} ]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$

**3.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n$ est un ouvert

**4.** Montrer que $\overline{A} = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} A^n$

**5.** Montrer que tout fermé est l'intersection dénombrable d'ouverts. Cela est-il encore vrai si on remplace “dénombrable” par “fini” ?

## Exercice VI

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, deux ensembles.

**1.** On suppose que $A$ est ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

**2.** L'inclusion $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ est-elle toujours vraie sans l'hypothèse $A$ ouvert ?

**3.** Donner un exemple d'ensembles ouverts $A$ et $B$ tels que les quatre ensembles

$$A \cap \overline{B}\ ,\quad \overline{A} \cap B\ ,\quad \overline{A \cap B}\quad \text{et}\quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

soient tous différents.

## Exercice VII

Soit $A$ et $B$ inclus dans $\mathbb{R}$

**1.** Démontrer que $(A \cup B)^* \subset A^* \cup B^*$ et que l'inclusion réciproque n'est pas vraie.

**2.** Démontrer que $A^* \cap B^* \subset (A \cap B)^*$ et que l'inclusion réciproque n'est pas vraie.