Correction des exercices de la feuille 5

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice I

1. L'ensemble K_i est la réunion de 2^i intervalles disjoints de longueur $\frac{1}{3^i}$. Notons $F_{i,0}, \ldots, F_{i,2^i-1}$ ces intervalles. On a par exemple

$$F_{0,0} = [0;1]$$

$$F_{1,0} = \left[0;\frac{1}{3}\right] \quad F_{1,1} = \left[\frac{2}{3};1\right]$$

$$F_{2,0} = \left[0;\frac{1}{9}\right] \quad F_{2,1} = \left[\frac{2}{9};\frac{1}{3}\right] \quad F_{2,2} = \left[\frac{2}{3};\frac{7}{9}\right] \quad F_{2,3} = \left[\frac{8}{9};1\right]$$

Supposons avoir fait la construction à l'étape i et notons

$$F_{i,j} = [a_{i,j}, b_{i,j}]$$

on a $b_{i,j} = a_{i,j} + \frac{1}{3}$. A l'étape $i+1$ l'intervalle $F_{i,j}$ sera remplacé par les intervalles $F_{i+1,2j}$ et $F_{i+1,2j+1}$ avec

$$F_{i+1,2j} = \left[a_{i,j}, a_{i,j} + \frac{1}{3^{i+1}}\right]$$

$$F_{i+1,2j+1} = \left[a_{i,j} + \frac{2}{3^{i+1}}, a_{i,j} + \frac{1}{3^i}\right]$$

ainsi définissions $(a_{i,j})_{i,j}$ par

$$\begin{cases} a_0, j & = & 0 & \forall j \in \mathbb{N} \\ a_{i+1,2j} & = & a_{i,j} & \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i+1,2j+1} & = & a_{i,j} + \frac{1}{3^{i+1}} & \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$

ceci défini des nombres $a_{i,j}$ pour tout entier i et pour tout entier $j < 2^i$. L'ensemble

$$K_i = \bigcup_{j=0}^{2^i-1} F_{i,j}$$

est bien défini. De plus $K_i \subset K_{i-1}$ pour tout entier i non nul. On obtient l'ensemble triadique de Cantor avec

$$K = \bigcap_{i=0}^{+\infty} K_i$$

2. L'ensemble K est fermé puisqu'il est une intersection de fermés. Il n'est pas ouvert puisque K est fermé et que ce n'est ni $\emptyset$ ni $\mathbb{R}$.

3. Les élements de K_1 sont ceux qui sécrivent

$$\overline{0,0\ldots}^3 \text{ ou } \overline{0,1\ldots}^3$$

ceux de K_2 sont ceux qui sécrivent

$$\overline{0,00\ldots}^3 \text{ ou } \overline{0,01\ldots}^3 \text{ ou } \overline{0,10\ldots}^3 \text{ ou } \overline{0,11\ldots}^3$$

pour montrer que les réels de K_i sont ceux dont un développement ternaire ne contient que des 0 et des 2 jusqu'à la i-ième position incluse on procède par récurrence. Soit P_i cette proposition. Alors

- P_1 est vrai
- supposons P_i vrai. Soit $x \in K_{i+1}$ alors

  $$x = \overline{0,a_1a_2\ldots a_ia_{i+1}\ldots}^3$$

  donc

  $$3x = \overline{a_1,a_2\ldots a_ia_{i+1}\ldots}^3 = a_1 + \overline{0,a_2\ldots a_ia_{i+1}\ldots}^3$$

  par construction de K on a $\overline{0,a_2\ldots a_ia_{i+1}\ldots}^3 \in K_i$ donc pour tout entier p compris entre 2 et $i+1$ on a $a_p \in \{0;1\}$. On a aussi $a_1 = 0$ donc P_{i+1} est vrai.

En conséquence les élements de K sont ceux dont un développement ternaire ne contient que des 0 et des 2.

4. Soit ψ l'application suivante

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & [0;1] \\ x = \overline{0,a_1a_2\ldots}^3 & \longmapsto & \displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{a_p/2}{2^p} \end{array}$$

$a_p/2 \in \{0;1\}$ puisque $a_p \in \{0;2\}$, l'image de x est un réel donné par son développement binaire. Cette application est bien surjective car tout nombre de $[0;1]$ admet un développement binaire.

L'intervalle $[0;1]$ n'est pas dénombrable donc K ne l'est pas non plus. En effet si K l'etait on pourrait numéroter ses élements et par la même les éléments de $[0;1]$ en choisissant comme numéro l'un des numéro de l'image réciproque par ψ.

5. Soit $x \in K$ et $\varepsilon > 0$. Soit n un entier tel que

$$\frac{1}{3^n} < 2\varepsilon$$

un tel entier n existe forcément, il suffit par exemple de prendre $n = \min\{1, \mathrm{E}(\frac{\ln(2\varepsilon)}{\ln 3})\}$. L'ensemble K_n est une réunion disjointe d'intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$, chaque composante disjointe étant espacée de $\frac{1}{3^n}$. Ainsi K_n ne peut pas contenir un intervalle de longueur supérieure à $\frac{1}{3^n}$, il vient

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\not\in K_n$$

donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\not\in K$ donc K n'est pas un voisinage de x. Par suite $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.

Exercice VII

1. L'intérieur d'un ensemble est inclus dans cet ensemble donc $\mathring{\overline{X}} \subset \overline{X}$. En vertu de l'exercice IV, $\overline{\mathring{\overline{X}}} \subset \overline{\overline{X}}$. Or $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ ainsi $\overline{\mathring{\overline{X}}} \subset \overline{X}$. l'exercice III donne alors

$$\mathring{\overline{\mathring{\overline{X}}}} \subset \mathring{\overline{X}}$$

Réciproquement $\mathring{\overline{X}} \subset \overline{\mathring{\overline{X}}}$ puisque l'adhérence d'un ensemble contient cet ensemble. En vertu de l'exercice III, $\mathring{\mathring{\overline{X}}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{X}}}}$. Or $\mathring{\mathring{\overline{X}}} = \mathring{\overline{X}}$ donc

$$\mathring{\overline{X}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{X}}}}$$

Il en résulte que

$$\mathring{\overline{\mathring{\overline{X}}}} = \mathring{\overline{X}}$$

c'est-à-dire que $f \circ f = f$. On dit que f est une projection.

L'adhérence d'un ensemble contient cet ensemble donc $\mathring{X} \subset \overline{\mathring{X}}$. En vertu de l'exercice III, $\mathring{\mathring{X}} \subset \mathring{\overline{\mathring{X}}}$. Or $\mathring{\mathring{X}} = \mathring{X}$ ainsi $\mathring{X} \subset \mathring{\overline{\mathring{X}}}$. l'exercice IV donne alors

$$\overline{\mathring{X}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{X}}}}$$

Réciproquement $\mathring{\overline{\mathring{X}}} \subset \overline{\mathring{X}}$ puisque l'intérieur d'un ensemble est inclus dans cet ensemble. En vertu de l'exercice IV, $\overline{\mathring{\overline{\mathring{X}}}} \subset \overline{\overline{\mathring{X}}}$. Or $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ donc

$$\overline{\mathring{\overline{\mathring{X}}}} \subset \overline{\mathring{X}}$$

Il en résulte que

$$\overline{\mathring{\overline{\mathring{X}}}} = \overline{\mathring{X}}$$

c'est-à-dire que $g \circ g = g$. On dit que g est une projection.