Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S1 – Année 2007-2008
ESI CS 1102 – Analyse I — Promotion ESILV 2012

Feuille d'exercices 4

Ouverts et Fermés

Exercice I

1. L'ensemble $[0,2]$ est-il un voisinage de 2 ? Qu'en est-il de $[0,2[$?

2. L'ensemble $[0,2]$ est-il un voisinage de 1 ? Qu'en est-il de $[0,2[$?

3. Existe-il $n \in \mathbb{Z}$ tel que l'ensemble $\mathbb{Q}$ soit un voisinage de n ?

Exercice II

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un ouvert ou non.

$$\begin{array}{lllllllll} A & = &]2,3[& B & = &]2,3[\cup]4,5[& C & = &]-1,0[\cup]0,1[\\ D & = & [1,2] & E & = &]0,1[\cup\{2\} & F & = &]-\infty,0[\\ G & = & \mathbb{Z} & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & [0,4[\\ J & = & \{0\} & K & = & \mathbb{Q} & L & = & \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\end{array}$$

Exercice III

Soit A un ouvert majoré, montrer que A ne contient pas sa borne supérieure.

Exercice IV

Montrer que $\mathbb{R}$ a la propriété de Hausdorff[1]

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \neq y,\ \exists (V,W) \in \mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y),\ V \cap W = \emptyset$$

[1]Felix Hausdorff, mathématicien Allemand du XXe siècle, travailla sur les fondements des mathématiques et la topologie. On lui doit une série de résultats, dont l'ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre* paru en 1914 où, en se basant sur les travaux de Fréchet, il crée la théorie de la topologie et des espaces métriques.

Felix Hausdorff (1868–1942)

Exercice V

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un fermé ou non.

$$\begin{array}{lllllllll} A & = & \cup_{n=1}^{+\infty}\{\frac{1}{n}\} & B & = & A\cup\{0\} & C & = &]0,1]\cup\{0;2;4\} \\ D & = & [1,2] & E & = &]0,1[\cup\{2\} & F & = &]-\infty,0]\cup\{-1;2\} \\ G & = & \mathbb{Q} & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\end{array}$$

Exercice VI

$$E=\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}\cup\left\{-\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

1. Représenter graphiquement E

2. Cet ensemble est-il un fermé ?

Exercice VII

Soit $A\subset\mathbb{R}$ et $B\subset\mathbb{R}$. On note

$$A+B=\{x\in\mathbb{R},\ \text{t.q. } \exists(a,b)\in A\times B,\ x=a+b\}$$

Montrer que si A ou B est ouvert alors $A+B$ est ouvert. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice VIII

Un ensemble $\mathcal{B}$ de parties ouvertes de $\mathbb{R}$ est appellé une base de la topologie de $\mathbb{R}$ si tout ouvert O est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$

1. Les intervalles ouverts forment-ils une base de la topologie de $\mathbb{R}$?

2. Les intervalles fermés forment-ils une base de la topologie de $\mathbb{R}$?

3. Montrer que les intervalles ouverts dont les bornes sont rationnelles forment également une base de la topologie de $\mathbb{R}$.

4. Soit D un ensemble dense dans $\mathbb{R}$. Peut-on généraliser la question précédente aux intervalles dont toute extrémité appartient à D ?

Exercice IX

Représenter graphiquement l'ensemble A dans chacun des cas suivants et dites si c'est un ouvert. Dans chaque cas on fera une démonstration détaillée.

1. $A=[-5,1]$

2. $A=]-5,1[$

3. $A=]-5,1[\cup\mathbb{Z}$