Interrogation du 13/12/2006

Corrigé

Exercice I

1. On a $1+\alpha > 1$ donc $1+\sqrt{1+\alpha} > 2$ donc

$$\left|\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right| > 1$$

il en résulte la divergence de la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n$$

Par ailleurs $1-\sqrt{1+\alpha} < 1$ donc

$$\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2} < \frac{1}{2} < 1$$

par ailleurs cette quantité étant positive

$$\left|\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right| < 1$$

il en résulte la convergence de la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n$$

2. On considère le polynôme caractéristique

$$r^2 - r - \frac{\alpha}{4} = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 1+\alpha$ et les racines sont

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}$$

Selon le cours, le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par

$$u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

avec C_1 et C_2 deux réels définis par

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = u_0 = 0 \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = u_1 = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} C_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \\ C_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \end{array}\right.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour terme général

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n$$

3. On a

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+2} - \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}u_{n+1} \\ & = & u_{n+1} + \frac{\alpha}{4}u_n - \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}u_{n+1} \\ & = & \frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}u_{n+1} + \frac{\alpha}{4}u_n \\ & = & \frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\left(u_{n+1} + \frac{\alpha}{2(1-\sqrt{1+\alpha})}u_n\right) \\ & = & \frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\left(u_{n+1} + \frac{\alpha(1+\sqrt{1+\alpha})}{2[1-(1+\alpha)]}u_n\right) \\ & = & \frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}u_n\right) \\ & = & \frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}v_n \end{array}$$

de manière analogue

$$\begin{array}{rcl} w_{n+1} & = & u_{n+2} - \frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}u_{n+1} \\ & = & u_{n+1} + \frac{\alpha}{4}u_n - \frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}u_{n+1} \\ & = & \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}u_{n+1} + \frac{\alpha}{4}u_n \\ & = & \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\left(u_{n+1} + \frac{\alpha}{2(1+\sqrt{1+\alpha})}u_n\right) \\ & = & \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\left(u_{n+1} + \frac{\alpha(1-\sqrt{1+\alpha})}{2[1-(1+\alpha)]}u_n\right) \\ & = & \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}u_n\right) \\ & = & \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}w_n \end{array}$$

4. Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raisons respectives $\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}$. On a

$$v_n = v_0\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n \text{ et } w_n = w_0\left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n$$

or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ donc la définition de v_0 et w_0 conduit à $v_0 = w_0 = 1$ ainsi

$$v_n = \left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n \text{ et } w_n = \left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n$$

5. On a

$$w_n - v_n = -\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}u_n + \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}u_n = \sqrt{1+\alpha}\,u_n$$

donc

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n$$

6. En vertu de la question 1, les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n$$

sont respectivement convergente et divergente. Il en résulte que les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2}\right)^n$$

le sont également. La somme d'une série convergente et d'une série divergente étant divergente, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

Exercice II

Posons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n+1}$$

1. Cette suite est alternée puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}u_n < 0$. Nous avons

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}+n+1}$$

décroissante puisque son inverse est la somme des suites croissantes n, $\sqrt{n}$ et d'une constante. En outre

$$\lim |u_n| = 0$$

En vertu du critère sur les séries alternées, la série associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. On a

$$\frac{|u_n|}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}+n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}$$

qui tend vers 1 donc

$$|u_n| \sim \frac{1}{n}$$

ces suites sont positives, en vertu du critère d'équivalence $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ sont de même nature. Or cette dernière est une série de Riemann divergente ($s = 1 \leq 1$). Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ diverge donc $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ n'est pas absolument convergente.

Exercice III

Posons

$$a_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad b_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(\sqrt{t+n})^3} dt$$

i) La positivité de $\frac{\sin(\pi t)}{(t+n)^{\frac{3}{2}}}$ sur $[0, 1]$ entraine la positivité de b_n.

ii) Soit n un entier naturel non nul, alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a $t + n + 1 \geq t + n$ donc

$$\frac{1}{(t+n+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(t+n)^{\frac{3}{2}}}$$

Or $\sin(\pi t) \in [0, 1]$ donc

$$\frac{\sin(\pi t)}{(t+n+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\sin(\pi t)}{(t+n)^{\frac{3}{2}}}$$

en intégrant entre 0 et 1, il vient $b_{n+1} \leq b_n$, c'est-à-dire la décroissance de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

iii) On a

$$\frac{1}{(t+n)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

donc

$$b_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t+n)^{\frac{3}{2}}} dt \leq \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{n^{\frac{3}{2}}} dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0$ et $b_n \geq 0$ donc $\lim b_n = 0$.

iv) Pout entiers naturels non nuls p et $q \geq p$,

$$\left| \sum_{n=p}^{q} (-1)^n \right| \leq 1$$

En vertu du théorème d'Abel, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$ converge.