Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2011

Interrogation du 13/12/2006

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (10 points)

Considérons $\alpha \in]0,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{\alpha}{4} u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

1. Les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2} \right)^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2} \right)^n$$

sont-elles convergentes ?

2. Déterminer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au moyen du polynôme caractéristique.

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - \frac{1+\sqrt{1+\alpha}}{2} u_n \\ w_n &= u_{n+1} - \frac{1-\sqrt{1+\alpha}}{2} u_n \end{aligned}$$

Donner une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n et entre w_{n+1} et w_n.

4. En déduire le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Déduire des questions 3 et 4, le résultat trouvé à la question 2.

6. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est-elle convergente ?

7. Déterminer l'équilibre de la relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n et déterminer s'il est globalement stable.

Exercice II (5 points)

La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n+1}$$

est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?

Exercice III (5 points)

La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(\sqrt{t+n})^3} dt \right)$$

est-elle convergente ?