Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2011

Interrogation du 14/11/2006

Corrigé

Exercice I

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons l sa limite er posons $\varepsilon = 1$. En vertu de la définition de la limite, il existe un rang $n \in N$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq 1$$

ainsi

$$\forall n \geq N,\ u_n \in [l-1, l+1]$$

Par ailleurs $\{u_0, u_1, ..., u_{N-1}\}$ est un ensemble fini, il admet donc un plus petit élément m et un plus grand élément M, ainsi

$$\forall n \in [\![0, N-1]\!],\ u_n \in [m, M]$$

par suite

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\min\{l-1, m\}, \max\{l+1, M\}]$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. La réponse est non, comme le montre le contre-exemple suivant : (u_n) suite constante égale à 1, elle converge, pourtant

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = N + 1$$

ne peut évidemment pas être majoré par une constante indépendante de N.

Exercice II

Soit

$$u_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} + 2006}$$

on a

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{2006}{n^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}}}$$

or $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} > 0$ donc $\lim n^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = +\infty$, par suite

$$\lim \frac{1}{1 + \frac{2006}{n^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}}} = 1$$

Il en résulte que

$$(u_n) \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}}$$

Ces suites sont positives, en vertu du critère d'équivalence les séries associées sont de même nature. La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}}$$

converge si et seulement si $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} > 1$, ce qui équivaut à $\sqrt{\alpha} < 1$ ce qui équivaut à $\alpha < 1$.

Ainsi, la série est convergente lorsque $\alpha \in]0,1[$ et divergente lorsque $\alpha \in [1,+\infty[$.

Exercice III

Si $q = 1$, il est clair que la série diverge. Supposons désormais $q \neq 1$. Soit N un entier naturel, on a

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

or q^{N+1} tend vers 0 si $|q| < 1$ et diverge si $q > 1$ ou si $q \leq -1$, ainsi la série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$.

Exercice IV

1. La réponse est Oui.

Soit $N \in \mathbb{N}$, notons

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n^2$$

Nous avons

$$\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)^2 = \sum_{n=0}^{N} u_n^2 + 2\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i-1} u_i u_j$$

or (u_n) est une suite à termes positifs donc le deuxième terme du membre de droite est positif, il s'en suit que

$$S_N \leq \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)^2$$

or $\sum_{n=0}^{N} u_n$ converge lorsque N tend vers $+\infty$ ainsi $\sum_{n=0}^{N} u_n$ est majorée par une constante M indépendante de N. Il en résulte que S_N est majorée (par M^2).

En outre $S_{N+1} - S_N = u_{N+1}^2 \geq 0$ donc (S_N) est croissante. Ainsi (S_N) est convergente, ce qu'il fallait démontrer.

2. La réponse est Non.

La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ fourni un contre exemple puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge alors que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ converge (sommes de Riemann avec $s = 1 \leq 1$ et $s = 2 > 1$ respectivement).