

Interrogation du 26/10/2006

Corrigé

Exercice I

Remarquons que

$$u_n = n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) = 2 \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}}$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}} = 1$$

par suite $\lim u_n = 2$.

Exercice II

Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A < \sqrt{5}$ alors posons $N = 0$ et remarquons que $\sqrt{2n^2 + 5} \geq \sqrt{5} \geq A$ est toujours vrai. Sinon $A \geq \sqrt{5}$, posons alors

$$N = \mathbb{E} \left(\sqrt{\frac{A^2 - 5}{2}} \right) + 1$$

alors,

$$n \geq N \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{A^2 - 5}{2}} \quad \text{donc}$$

$$n \geq N \Rightarrow n^2 \geq \frac{A^2 - 5}{2} \quad \text{donc}$$

$$n \geq N \Rightarrow 2n^2 \geq A^2 - 5 \quad \text{donc}$$

$$n \geq N \Rightarrow 2n^2 + 5 \geq A^2 \quad \text{donc}$$

$$n \geq N \Rightarrow \sqrt{2n^2 + 5} \geq A$$

Cela établit que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \sqrt{2n^2 + 5} \geq A$$

donc $\lim \sqrt{2n^2 + 5} = +\infty$.

Exercice III

Notons l la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout entier n , nous avons

$$|v_n - l^2| = |u_n^2 - l^2| = |u_n - l| |u_n + l| \quad (2)$$

Par ailleurs, la définition de la limite donne

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon' \quad (3)$$

Lorsque $\varepsilon' = 1$, cela entraîne l'existence d'un entier N_1 tel que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < 1$$

ainsi lorsque $n \geq N_1$, nous avons $-1 < u_n - l < 1$ et donc $2l - 1 < u_n + l < 2l + 1$. Notons $M = \max\{|2l + 1|, |2l - 1|\}$, nous avons alors

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n + l| < M$$

Nous remarquons que $M > 0$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. En vertu de (3) lorsque $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Soit alors $N = \max\{N_1, N_2\}$, on a $n \geq N_1$ donc $|u_n + l| < M$ et $n \geq N_2$ donc $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{M}$, par suite

$$|u_n + l||u_n - l| < M \frac{\varepsilon}{M}$$

L'équation (2) entraîne

$$n \geq N \Rightarrow |v_n - l^2| < \varepsilon$$

si bien que l'on a établi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n - l^2| < \varepsilon$$

c'est-à-dire la convergence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers l^2 .

Exercice IV

1. Montrons que $E = \mathbb{Z}$ vérifie (1). Posons $d = 1$. Soit $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ avec $y \neq x$. On a $x - y \in \mathbb{Z}$ donc $|x - y| \in \mathbb{N}$, or $y \neq x$ donc $|x - y| \neq 0$. Ainsi $|y - x| \in \mathbb{N}^*$ donc $|y - x| \geq d$.

2. Soit $E = \mathbb{R}$ alors

$$\forall d > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}, |y - x| > d$$

puisqu'il suffit de prendre $y = x + \frac{d}{2}$. Ainsi (1) n'est pas vérifié.

3. La suite (u_n) est convergente, donc elle est de Cauchy, ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, q \geq p \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

en particulier pour $\varepsilon = d$, il existe un rang N à tel que $|u_{N+1} - u_N| < d$. Or $u_N \in E$ et $u_{N+1} \in E$.

Si $u_N \neq u_{N+1}$, en appliquant (1) on a $|u_N - u_{N+1}| > d$ ce qui est en contradiction avec $|u_{N+1} - u_N| < d$. Ainsi $u_{N+1} = u_N$. Par suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir du rang N .