

Devoir 3

A rendre le 10/01/2007

Soit P l'ensemble des nombres premiers et $b \in P$. Notons

$$E_b = \left\{ \frac{m}{b^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$E = \bigcup_{b \in P} E_b$$

Exercice I

1. L'ensemble E_b muni de l'addition et de la multiplication est-il un anneau ?
2. L'ensemble E muni de l'addition et de la multiplication est-il un anneau ?
3. A-t'on $E \subset \mathbb{Q}$? A-t'on $E = \mathbb{Q}$?

Exercice II

1. Montrer que pour tout $b \in P$, l'ensemble E_b est dense dans \mathbb{R} .
2. En déduire que E est dense dans \mathbb{R} .

Exercice III

1. L'ensemble E est-il un ouvert ?
2. Existe-t'il un point de E dont E soit un voisinage ?

Exercice IV

Existe-t'il une suite d'éléments de E qui converge vers π ?