Devoir 2

corrigé

Exercice I

1. Considérons f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t^2}$ alors $\int_1^n f(t)dt = -\frac{1}{n} + 1$ donc $\Phi(f)$ est défini et on a

$$\Phi(f) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

2. Considérons f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t}$ alors $\int_1^n f(t)dt = \ln n - \ln 1 = \ln n$ ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^n f(t)dt = +\infty$$

dont $\Phi(f)$ n'est pas défini.

3. Pour tout entier naturel n non nul, définissons

$$I_n = \int_1^n f(t)dt$$

Si $t \in [k, k+1]$ alors $f(t) \leq f(k+1)$. En integrant entre k et $k+1$, il vient $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k+1) = u_{k+1}$ par suite $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}$ ainsi

$$I_n \leq \sum_{k=2}^{n} u_k$$

Le membre de droite étant convergent, il est majoré par un réel M indépendant de n. Ainsi $I_n \leq M$. Par ailleurs

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(t)dt \geq 0$$

donc (I_n) est croissante. Ainsi (I_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. Il en résulte que f est dans le domaine de définition de Φ.

Exercice II

1. Pour tout entier naturel n non nul, la relation de Chasles donne

$$\int_1^n f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \tag{1}$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ alors

$$\int_k^{k+1} f(t)dt = \int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} dt$$

en réalisant le changement de variables $u = t + k$, il vient

$$\int_k^{k+1} f(t)dt = \int_0^1 \frac{\sin(\pi u + k\pi)}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

La variable u étant muette, il est possible de la changer en t. En outre, si k est pair alors $\sin(\pi t + k\pi) = \sin(\pi t)$ et si k est impair alors $\sin(\pi t + k\pi) = -\sin(\pi t + (k-1)\pi + \pi) = \sin(\pi t + \pi) = \sin(\pi t)$. Ainsi $\sin(\pi t + k\pi) = (-1)^k \sin(t\pi)$, d'où

$$\int_k^{k+1} f(t)dt = (-1)^k \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} dt$$

Il résulte de (1) que

$$\int_1^n f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} dt$$

2. Soit k un entier naturel n non nul, alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $t + k + 1 \geq t + k$ donc

$$\frac{1}{(t+k+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(t+k)^{\frac{3}{2}}}$$

Or $\sin(\pi t) \in [0,1]$ donc

$$\frac{\sin(\pi t)}{(t+k+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}}$$

en intégrant entre 0 et 1, il vient $v_{k+1} \leq v_k$, c'est-à-dire la décroissance de $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Par ailleurs la positivité de $\frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}}$ sur $[0,1]$ entraine la positivité de v_k. Enfin,

$$\frac{1}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

on a

$$v_k = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} \leq \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{k^{\frac{3}{2}}} \leq \int_0^1 \frac{dt}{k^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

or $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = 0$ et $v_k \geq 0$ donc $\lim v_k = 0$. En conclusion, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite positive, décroissante et convergente vers 0.

3. Soit n un entier naturel non nul et

$$I_n = \int_1^n \frac{\sin(\pi t)}{t\sqrt{t}} dt$$

En vertu de la question précédente, $I_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k v_k$ avec

i) $v_k \geq 0$

ii) $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

iii) $\lim v_k = 0$

iv) Pout entiers naturels non nuls p et $q \geq p$,

$$\left| \sum_{k=p}^{q} (-1)^k \right| \leq 1$$

En vertu du théorème d'Abel, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ converge, donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Ainsi f est dans le domaine de définition de Φ