

## Devoir 1

*corrigé*

### Exercice I

1. Notons  $l$  la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Pour tout entier  $n$ , nous avons

$$|v_n - l^2| = |u_n^2 - l^2| = |u_n - l| |u_n + l| \quad (2)$$

Par ailleurs, la définition de la limite donne

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon' \quad (3)$$

Lorsque  $\varepsilon' = 1$ , cela entraîne l'existence d'un entier  $N_1$  tel que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < 1$$

ainsi lorsque  $n \geq N_1$ , nous avons  $-1 < u_n - l < 1$  et donc  $2l - 1 < u_n + l < 2l + 1$ . Notons  $M = \max\{|2l + 1|, |2l - 1|\}$ , nous avons alors

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n + l| < M$$

Nous remarquons que  $M > 0$ .

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$ . En vertu de (3) lorsque  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$ , il existe un entier  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que

$$n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Soit alors  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , on a  $n \geq N_1$  donc  $|u_n + l| < M$  et  $n \geq N_2$  donc  $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{M}$ , par suite

$$|u_n + l| |u_n - l| < M \frac{\varepsilon}{M}$$

L'équation (2) entraîne

$$n \geq N \Rightarrow |v_n - l^2| < \varepsilon$$

si bien que l'on a établi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n - l^2| < \varepsilon$$

c'est-à-dire la convergence de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $l^2$ .

2. La convergence de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'entraîne pas la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , comme le montre le contre-exemple suivant :

$$u_n = (-1)^n$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas mais son carré est la suite constante égale à 1, qui converge.

3. Soit  $L = \lim v_n$ .

- Supposons  $L = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, on a

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n| < \varepsilon'$$

en particulier lorsque  $\varepsilon' = \varepsilon^2$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$n \geq N \Rightarrow u_n^2 < \varepsilon^2$$

Or  $u_n$  et  $\varepsilon$  sont des quantités positives. Par suite

$$n \geq N \Rightarrow u_n < \varepsilon$$

si bien que l'on a établi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$$

c'est-à-dire la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers 0.

- Supposons  $L > 0$ . Notons  $l = \sqrt{L}$ , on a  $l > 0$ . Par hypothèses, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \geq 0$ , donc  $u_n + l \geq l > 0$  donc

$$\frac{1}{|u_n + l|} < \frac{1}{l}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $L$ , on a

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n - L| < \varepsilon'$$

ainsi, en utilisant (2) et en posant  $\varepsilon' = l\varepsilon$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| |u_n + l| < l\varepsilon$$

par suite

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

si bien que l'on a établi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

c'est-à-dire la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $l = \sqrt{L}$ .

## Exercice II

1. Soit  $\varepsilon > 0$ . La convergence de  $(a_n^2 + b_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $3l^2$  donne l'existence d'un rang  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n^2 + b_n^2 - 3l^2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

La convergence de  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\frac{1}{2}l^2$  donne l'existence d'un rang  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que

$$n \geq N_2 \Rightarrow \left| a_n b_n - \frac{1}{2}l^2 \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

ce qui donne

$$n \geq N_2 \Rightarrow |2a_n b_n - l^2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit  $N = \max\{N_1, N_2\}$  alors

$$n \geq N \Rightarrow \begin{cases} n \geq N_1 \Rightarrow |a_n^2 + b_n^2 - 3l^2| < \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq N_2 \Rightarrow |2a_nb_n - l^2| < \varepsilon \end{cases}$$

ainsi

$$n \geq N \Rightarrow |a_n^2 + b_n^2 - 3l^2| + |2a_nb_n - l^2| < \varepsilon$$

or

$$|(a_n^2 + b_n^2 - 3l^2) + (2a_nb_n - l^2)| \leq |a_n^2 + b_n^2 - 3l^2| + |2a_nb_n - l^2|$$

donc

$$n \geq N \Rightarrow |a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n - 4l^2| < \varepsilon$$

si bien que l'on a établi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n - 4l^2| < \varepsilon$$

c'est-à-dire (1).

**2.** On a  $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n$ , la question précédente permet d'écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |(a_n + b_n)^2 - (2l)^2| < \varepsilon$$

ainsi  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(2l)^2$ . Comme  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite positive, l'exercice I permet d'affirmer que  $\lim(a_n + b_n) = 2|l|$ .

**3.** On a  $\lim(a_n + b_n) = 2|l|$  et  $\lim(a_n - b_n) = l$ . Or

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}[(a_n + b_n) + (a_n - b_n)] \\ b_n &= \frac{1}{2}[(a_n + b_n) - (a_n - b_n)] \end{aligned}$$

ainsi  $\lim a_n = |l| + \frac{1}{2}l$  et  $\lim b_n = |l| - \frac{1}{2}l$ . Il s'en suit que  $\lim(a_nb_n) = (|l| + l/2)(|l| - l/2) = |l|^2 - \frac{1}{4}l^2 = \frac{3}{4}l^2$ , ainsi

$$\frac{3}{4}l^2 = \frac{1}{2}l^2$$

d'où  $l^2 = 0$ , ainsi

$$l = 0$$

et

$$\lim a_n = 0$$

$$\lim b_n = 0$$