Devoir 1

A rendre le 23/10/2006

Exercice I

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$v_n = u_n^2$$

1. Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. En utilisant la définition de la limite, montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente.

2. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, peut-on en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

3. Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. En utilisant la définition de la limite, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice II

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lim\,(a_n^2+b_n^2) & = & 3l^2 \\ \lim\,(a_nb_n) & = & \frac{1}{2}l^2 \\ \lim\,(a_n-b_n) & = & l \end{array}\right.$$

1. En utilisant la définition de la limite, démontrer que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ n\geq N \Rightarrow |a_n^2+2a_nb_n+b_n^2-4l^2|<\varepsilon \qquad (1)$$

2. Déduire de (1) la limite de $(a_n+b_n)_{n\in N}$.

3. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Déterminez leur limite et la valeur de l.