Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

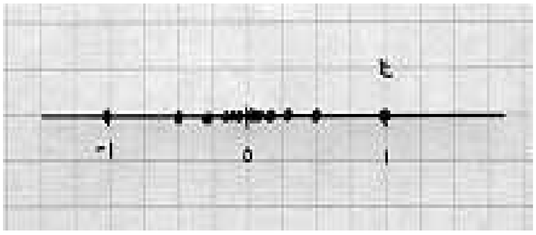
S1 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2011

Correction des exercices de la feuille 6

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice VI

1.



2. Considérons $A = \mathbb{R} \setminus E$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{1}{\varepsilon}$ (il suffit de prendre $n = \mathrm{E}(\frac{1}{\varepsilon})$). On a donc $\frac{1}{n} \in]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[$, or $\frac{1}{n} \in E$ donc $\frac{1}{n} \notin A$. Par suite

$$]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[\not\subset A$$

il en résulte que A n'est pas voisinage de 0. On a $0 \notin E$ donc $0 \in A$ donc A n'est pas un ouvert. Ainsi E n'est pas un fermé.

Exercice VII

Supposons que A ou B est ouvert. Sans perte de généralité on peut supposer que c'est A.

- Si A ou B est vide alors $A+B$ est vide, dans ce cas A ou B ouvert implique $A+B$ ouvert.
- Sinon, soit $x \in A+B$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a+b$. Comme A est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset A$. Alors $]a+b-\varepsilon, a+b+\varepsilon[\subset A+B$, ce qui donne

  $$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A+B$$

  donc $A+B$ est voisinage de x. Ainsi $A+B$ est un ouvert.

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant : $A = [0, +\infty[$, $B =]-\infty, 0]$, $A+B = \mathbb{R}$.