

Feuille d'exercices 6

Ouverts et Fermés

Exercice I

1. L'ensemble $[0, 2]$ est-il un voisinage de 2 ? Qu'en est-il de $[0, 2[$?
2. L'ensemble $[0, 2]$ est-il un voisinage de 1 ? Qu'en est-il de $[0, 2[$?
3. Existe-il $n \in \mathbb{Z}$ tel que l'ensemble \mathbb{Q} soit un voisinage de n ?

Exercice II

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un ouvert ou non.

$$\begin{array}{lll} A =]2, 3[& B =]2, 3[\cup]4, 5[& C =]-1, 0[\cup]0, 1[\\ D = [1, 2] & E =]0, 1[\cup \{2\} & F =]-\infty, 0[\\ G = \mathbb{Z} & H = \mathbb{R}^* & I = [0, 4[\\ J = \{0\} & K = \mathbb{Q} & L = \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\end{array}$$

Exercice III

Soit A un ouvert majoré, montrer que A ne contient pas sa borne supérieure.

Exercice IV

Montrer que \mathbb{R} a la propriété de Hausdorff¹

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \neq y, \exists (V, W) \in \mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y), V \cap W = \emptyset$$

¹Felix Hausdorff, mathématicien Allemand du XXe siècle, travailla sur les fondements des mathématiques et la topologie. On lui doit une série de résultats, dont l'ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre* paru en 1914 où, en se basant sur les travaux de Fréchet, il crée la théorie de la topologie et des espaces métriques.



Felix Hausdorff (1868–1942)

Exercice V

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un fermé ou non.

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} & B &= A \cup \{0\} & C &=]0, 1] \cup \{0; 2; 4\} \\ D &= [1, 2] & E &=]0, 1[\cup \{2\} & F &=]-\infty, 0] \cup \{-1; 2\} \\ G &= \mathbb{Q} & H &= \mathbb{R}^* & I &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\end{aligned}$$

Exercice VI

$$E = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Représenter graphiquement E
2. Cet ensemble est-il un fermé ?

Exercice VII

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b\}$$

Montrer que si A ou B est ouvert alors $A + B$ est ouvert. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice VIII

Un ensemble \mathcal{B} de parties ouvertes de \mathbb{R} est appelé une base de la topologie de \mathbb{R} si tout ouvert O est réunion d'éléments de \mathcal{B}

1. Les intervalles ouverts forment-ils une base de la topologie de \mathbb{R} ?
2. Les intervalles fermés forment-ils une base de la topologie de \mathbb{R} ?
3. Montrer que les intervalles ouverts dont les bornes sont rationnelles forment également une base de la topologie de \mathbb{R} .
4. Soit D un ensemble dense dans \mathbb{R} . Peut-on généraliser la question précédente aux intervalles dont toute extrémité appartient à D ?

Exercice IX

Représenter graphiquement l'ensemble A dans chacun des cas suivants et dites si c'est un ouvert. Dans chaque cas on fera une démonstration détaillée.

1. $A = [-5, 1]$
2. $A =]-5, 1[$
3. $A =]-5, 1[\cup \mathbb{Z}$