

## Correction des exercices de la feuille 2

*Exercices non corrigés en travaux dirigés*

### Exercice I

1. Soit  $n \geq 2$  un entier, on a

$$\begin{aligned}v_n &= \ln u_n \\&= \ln n! + n - n \ln n - \frac{1}{2} \ln n \\&= \ln n + \ln(n-1)! + n - n \ln n - \frac{1}{2} \ln n\end{aligned}$$

et  $v_{n-1} = \ln(n-1)! + n-1 - (n-1) \ln(n-1) - \frac{1}{2} \ln(n-1)$  donc

$$\begin{aligned}v_n - v_{n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2} - n\right) \ln n + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n-1) \\&= \left(n - \frac{1}{2}\right) (\ln(n-1) - \ln n) + 1 \\&= \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n)\end{aligned}$$

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$ , on a

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \\&= \frac{1}{4x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \\&> 0\end{aligned}$$

Par suite  $f$  est croissante sur  $]1, +\infty[$ . En écrivant  $f(x)$  sous la forme  $\frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \ln \frac{x-1}{x}$  il vient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

**Raisonnons par l'absurde.** Supposons qu'il existe  $x_0 \in ]1, +\infty[$  tel que  $f(x_0) > 0$ . Comme  $f$  est croissante, on en déduit

$$\forall x \in [x_0, +\infty[, f(x) \geq f(x_0)$$

donc la limite de  $f$  en  $+\infty$  est supérieure à  $f(x_0) > 0$ . Cela est contradictoire avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . **Fin du raisonnement par l'absurde.** Comme  $\exists x_0 \in ]1, +\infty[, f(x_0) > 0$  n'est pas vrai on peut affirmer que  $f(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ .

Pour  $n \geq 2$  on a  $v_n - v_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) f(n)$  donc  $v_n - v_{n-1} < 0$  ainsi  $(v_n)_{n \geq 1}$  est strictement décroissante. Comme  $u_n = \exp v_n$  et que  $\exp$  est strictement croissante, la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est strictement décroissante également.

3. La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel positif. Il sera noté  $C$  dans la suite.

4. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$  donc pour tout entier  $k \geq 2$  on a

$$\forall x \in [k-1, k], \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

donc

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{k^2} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx$$

et comme  $k - (k-1) = 1$  il vient

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx \quad (1)$$

Graphiquement cela signifie que l'aire du rectangle dont les sommets sont  $(k-1, 0)$ ,  $(k-1, \frac{1}{k^2})$ ,  $(k, \frac{1}{k^2})$ ,  $(k, 0)$  est inférieure à l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = k-1$  et  $x = k$ . En sommant les équations (1) pour  $k$  entier dans  $[2, n]$  il vient

$$w_n \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$$

Nous pourrions également faire un raisonnement par récurrence. Graphiquement cela signifie que la somme des aires des rectangles qui se situent sous la courbe est inférieure à l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = n$ .

5. Soit  $n \geq 1$  un entier. D'une part

$$w_n \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

donc  $(w_n)_{n \geq 1}$  est majorée par 1, d'autre part

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

donc  $(w_n)_{n \geq 1}$  est croissante. Ainsi cette suite converge vers une limite inférieure à 1. (Cette valeur est  $\frac{\pi^2}{6} - 1$ )

6. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{5x^2(x - \frac{1}{2})}$$

elle est dérivable sur son domaine de définition et sa dérivée vaut

$$g'(x) = f'(x) - \frac{10x(x - \frac{1}{2}) + x^2}{(5x^2(x - \frac{1}{2}))^2}$$

finalement on a

$$g'(x) = \frac{-7x^2 + 16x - 4}{20x^3(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$$

Cette quantité est négative sur  $]1, +\infty[$  donc  $g$  est décroissante sur cet intervalle. En outre  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

Comme dans l'exercice I, on en déduit que

$$\forall x \in ]1, +\infty[, g(x) \geq 0$$

donc

$$\forall x \in ]1, +\infty[, f(x) \geq -\frac{1}{5x^2(x - \frac{1}{2})}$$

7. Pour  $k \geq 2$  entier on a

$$v_k - v_{k-1} \geq \left(k - \frac{1}{2}\right) f(k) \geq -\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{5k^2(k - \frac{1}{2})} \geq -\frac{1}{5k^2}$$

8. Soit  $(P_n)$  la proposition " $v_n \geq -\frac{1}{5}w_n + 1$ ".

- $(P_2)$  est vraie puisque

$$v_2 = \ln \frac{2e^2}{4\sqrt{2}} = 2 - \ln(2\sqrt{2}) \geq \frac{19}{20} = -\frac{1}{5}w_2 + 1$$

- Supposons  $(P_n)$  vraie, et  $n \geq 2$  alors  $v_n \geq -\frac{1}{5}w_n + 1$  ce qui implique les 4 lignes suivantes

$$\begin{aligned} v_n + (v_{n+1} - v_n) &\geq -\frac{1}{5}w_n + (v_{n+1} - v_n) + 1 \\ v_{n+1} &\geq -\frac{1}{5}w_n + (v_{n+1} - v_n) + 1 \\ v_{n+1} &\geq -\frac{1}{5}w_n - \frac{1}{5(n+1)^2} + 1 \\ v_{n+1} &\geq -\frac{1}{5}w_{n+1} + 1 \end{aligned}$$

donc  $(P_{n+1})$  est vraie.

Cela établit l'inégalité souhaitée par récurrence.

9. Comme  $w_n \geq 1$  on a  $-\frac{1}{5}w_n \geq -\frac{1}{5}$  donc  $v_n \geq \frac{4}{5}$ . Ainsi  $(v_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et minorée par  $\frac{4}{5}$ , elle converge donc vers un réel  $l \geq \frac{4}{5}$ . Comme  $u_n = \exp v_n$  et que  $\exp$  est continue on a  $\lim u_n \geq \exp \frac{4}{5}$  donc  $C \geq \exp \frac{4}{5}$ .

10. On a

$$\lim \frac{n! e^n}{C n^n \sqrt{n}} = 1$$

donc

$$\lim \frac{n!}{C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = 1$$

ainsi

$$n! \sim C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

Il a été montré que  $C > \exp \frac{4}{5}$ , ce réel est  $\sqrt{2\pi}$ .

### Exercice III

Soit  $\alpha$  un réel et  $v_n = u_n + \alpha$  alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = au_n + b + \alpha = a(v_n - \alpha) + b + \alpha = av_n + \alpha(1 - a) + b$$

posons alors  $\alpha = \frac{b}{a-1}$ , il vient que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $a$  et de premier terme  $v_0$  ainsi  $v_n = v_0 a^n$  donc

$$u_n + \alpha = (u_0 + \alpha)a^n$$

donc

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$$