

## Correction des exercices de la Feuille 1

*Exercice non corrigé en travaux dirigés*

### Exercice VI

1. Considérons la fonction  $f$  définie sur  $[8, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$$

Cette fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables non nulles sur son domaine de définition, on a

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^2 - 2 \ln x}{(\ln x)^4} = \frac{(\ln x)(\ln x - 2)}{(\ln x)^4}$$

On sait que  $\ln 8 > 2$  donc

$$f'(x) > 0$$

donc  $f$  est croissante. Par suite  $(v_n)$  est croissante dès que  $n \geq 8$ .

2. On a  $v_8 = \frac{8}{(\ln 8)^2}$ . Comme  $\frac{8}{(\ln 8)^2} > 1$  on a

$$v_8 > 1$$

Comme  $(v_n)$  est croissante on en déduit que  $v_n \geq v_8 > 1$  lorsque  $n \geq 8$ . Ainsi

$$\frac{n}{(\ln n)^2} \geq 1$$

donc

$$n \geq (\ln n)^2$$

3. Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Posons

$$N = \max\{8; E(e^A) + 1\}$$

alors pour  $n \geq N$  on a  $n \geq e^A$  donc

$$\ln n \geq A$$

donc  $\ln n(\ln n - A) \geq 0$  donc

$$(\ln n)^2 - A \ln n \geq 0$$

Or comme  $n \geq 8$  on a

$$n \geq (\ln n)^2$$

ainsi  $n - A \ln n \geq 0$  donc  $n \geq A \ln n$  d'où finalement

$$\frac{n}{\ln n} \geq A$$

On a montré que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$$

ainsi

$$\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$$