Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2011

Feuille d'exercices 1

Limites de suites

Exercice I

Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{3^n}{n!}$

2. $u_n = 3^n - n^3$

3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$

4. $u_n = n\sin(\frac{1}{n+1})$

5. $u_n = \frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)}$

6. $u_n = \frac{n^2-n}{n^2+1}$

Exercice II

Dire si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes vérifient le critère de Cauchy[1]

1. $u_n = \frac{1}{n+2}$

2. $u_n = n^2$

Exercice III

En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim e^{2n+1} = +\infty$$

[1] Augustin Cauchy, mathématicien français du XIXe siècle, donna pour la première fois des définitions rigoureuses de la convergence et de la continuité. Il définit également les nombres complexes. Il travailla aussi sur les groupes de permutations ; cependant ayant égaré des manuscrits d'Abel et de Galois, il a retardé d'un demi-siècle la théorie des groupes.

Baron Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Exercice IV

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n \end{cases}$$

1. Démontrer que (u_n) est une suite croissante à termes positifs.

2. Démontrer que (u_n) est divergente.

Exercice V

En utilisant la définition de la limite, dites si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes ont une limite.

1. $u_n = n^6$

2. $u_n = \ln n$

3. $u_n = \frac{1+e^n}{n}$

4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

5. $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}+4} + 2$

6. $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^3}$

Exercice VI

1. Soit $(v_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{n}{(\ln n)^2}$$

Montrer que cette suite est croissante des son 7e terme (c'est-à-dire pour $n \geq 8$).

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 8$ on a

$$n \geq (\ln n)^2$$

3. En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$$

Exercice VII

En utilisant la définition des suites de Cauchy démontrez que la somme de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy.

Exercice VIII

Est-ce que toute suite convergente d'entiers est stationnaire à partir d'un certain rang ?