

Feuille d'exercices

Interpolation, moindres carrés, courbes de Bézier et GSL

Exercice I

On considère la fonction $f(x) = \cos x$, et on donne le tableau suivant :

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4
$\cos x_i$	0.99500	0.98007	0.95534	0.92106

1. Calculer une valeur approchée de $f(0.23)$ en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1, puis celui de degré 2.
2. Calculer l'erreur d'interpolation commise pour chacun des cas.

Exercice II

1. Calculer une valeur approximative de $f(9)$ avec le polynôme d'interpolation de Newton basé sur $f(2) = 3$, $f(3) = 8$, $f(10) = 12$.
2. La valeur $f(10) = 12$ est erronée ; la valeur corrigée de $f(10)$ est $12 + \epsilon$, avec ϵ proche de 0. De combien cela modifie-t-il l'approximation de $f(9)$? Une petite erreur de $f(10)$ influe-t-elle peu ou beaucoup sur l'approximation de $f(9)$?

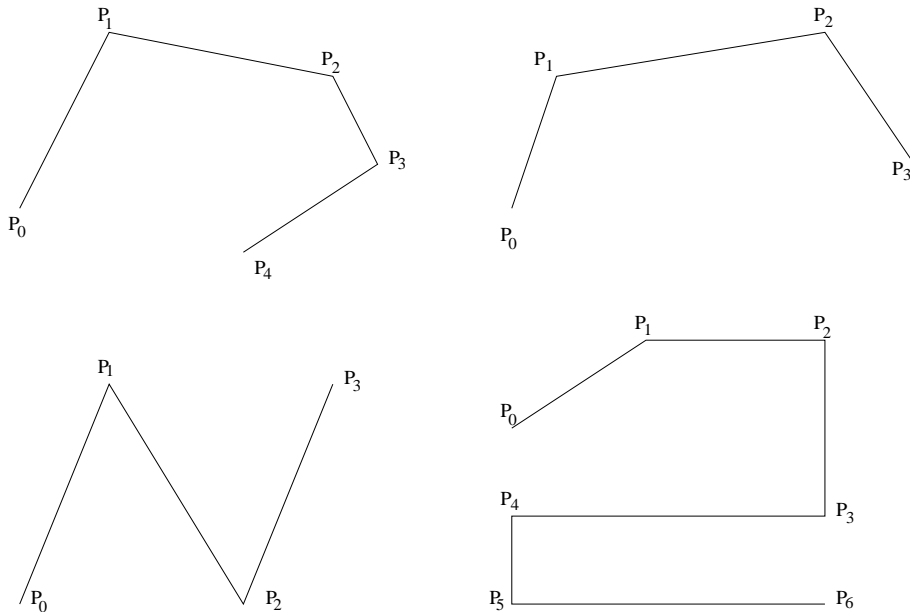
Exercice III

Tracer l'allure générale de la courbe de Bézier¹ passant par les points de contrôle donnés, dans les cas suivants

¹Pierre Bézier, mathématicien français contemporain, fit sa carrière à la régie Renault où il entre en 1933. Les années 50 voient l'avènement de la fabrication des automobiles par des machines-outils perfectionnées (c'est la grande époque des 4cv vendues à un million d'exemplaires) et il fallait mettre au point des processus fiables et précis dans l'élaboration des carrosseries. Les courbes et surfaces de Bézier, permettant l'usage de machines à commande numérique, virent le jour en 1960. Cette année-là marque le début de ce que l'on appelle aujourd'hui la CAO (Conception Assistée par Ordinateur). A la base, l'idée fut de lisser par une méthode mathématique simple, une courbe tracée à main-levée par les dessinateurs industriels. On notera une polémique sur la paternité de ces courbes que certains attribuent à Paul de Casteljaou. Il travaillait à la même époque chez Citroën mais la peur de l'espionnage chez ce dernier constructeur fit que ce sont les résultats de Bézier qui furent diffusés. Les courbes de Bézier sont aussi utilisées dans beaucoup d'autres domaines, y compris dans les fontes vectorielles de caractères.



Pierre Etienne Bézier (1910–1999)



Exercice IV

On considère les points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 dont les coordonnées dans le plan sont $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$.

1. Construire à l'aide de l'algorithme de Casteljau les points de la courbe de Bézier $\gamma(t)$ correspondant aux paramètres $t = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{3}{4}$. En déduire l'allure de la courbe.
2. Donner une représentation paramétrique de $\gamma(t)$ à l'aide des polynômes de Bernstein. Retrouvez la représentation graphique obtenue au 1.

Exercice V

Trouver le polynôme de degré 2 qui satisfait les moindres carrés pour le nuage $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$.

Exercice VI

On considère le système suivant

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + t = 8 \\ x + y + z + 6t = 30 \\ 5x + y - z - t = 0 \\ 9x + 8y - 7z + 2t = 12 \end{cases}$$

1. Le résoudre à la main en utilisant la décomposition LU .
2. Le résoudre au moyen de GSL.