Interrogation du 28/10/2007

Corrigé

Exercice I

1. Le gradient de f en (x, y) est donné par

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2xy + y^2 + y \\ 3y^2 + 4y + x^2 + 2xy + x \end{pmatrix}$$

Ainsi f admet un point critique en (x, y) si et seulement si

$$\begin{cases} 2x(1+y) + y(y+1) = 0 \\ 3y^2 + 4y + x^2 + 2xy + x = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} (2x+y)(1+y) = 0 \\ 3y^2 + 4y + x^2 + 2xy + x = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = -2x \text{ ou } y = -1 \\ 3y^2 + 4y + x^2 + 2xy + x = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = -2x \\ 3y^2 + 4y + x^2 + 2xy + x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -1 \\ 3y^2 + 4y + x^2 + 2xy + x = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = -2x \\ 9x^2 - 7x = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = -2x \\ x = 0 \text{ ou } x = \frac{7}{9} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$(x,y) \in \left\{ (0,0), \left(\frac{7}{9}, -\frac{14}{9}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -1\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right) \right\}$$

2. La matrice hessienne de f en (x, y) est

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x+2y+1 \\ 2x+2y+1 & 2x+6y+4 \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne en $(0, 0)$ est

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

dont le determinant vaut 7, ce qui est positif. La fonction f admet un extremum en $(0,0)$. En outre, la trace de cette matrice vaut 6, ce qui est positif. La fonction f admet un minimum en $(0,0)$.

$$\mathrm{H}f\left(\frac{7}{9},-\frac{14}{9}\right) = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 34 \end{pmatrix}$$

dont le determinant vaut $\frac{35}{9}$ qui est positif. La fonction f admet un extremum en $\left(\frac{7}{9},-\frac{14}{9}\right)$. En outre, la trace de cette matrice vaut $-\frac{44}{9} < 0$, ce qui est négatif. La fonction f admet un maximum en $\left(\frac{7}{9},-\frac{14}{9}\right)$.

$$\mathrm{H}f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-1\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

dont le determinant vaut -5, ce qui est négatif. La fonction f admet un point-selle en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},-1\right)$.

$$\mathrm{H}f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},-1\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

dont le determinant vaut -5 qui est négatif. La fonction f admet un point-selle en $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},-1\right)$.

3. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\alpha \quad \beta)\ \mathrm{H}f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},-1\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

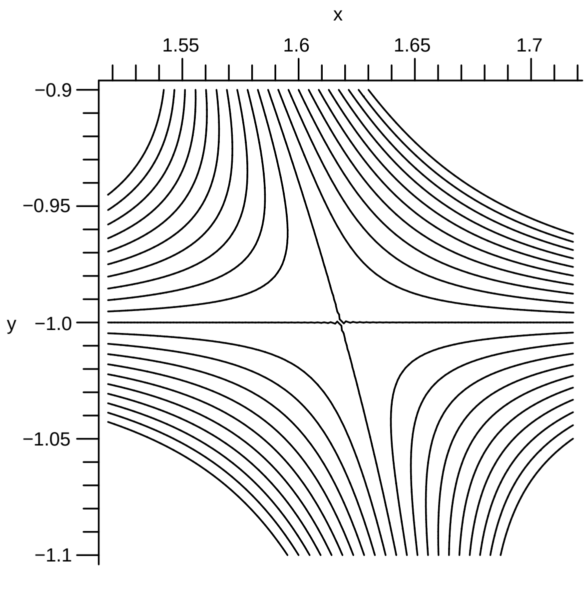
équivaut à

$$2\sqrt{5}\alpha\beta + (-1+\sqrt{5})\beta^2 = 0$$

ce qui équivaut à

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{2\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\alpha$$

Ce qui correspond aux équations des lignes séparatrices de col dans un repère local centré au point selle que l'on étudie. On approxime le coefficient directeur par -3.6. Cela conduit aux lignes séparatrices de col (et subséquement aux courbes de niveaux) représentées ci-dessous.



Exercice II

1. L'équation

$$(\alpha \quad \beta)\ \mathrm{H}f\,(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

équivaut à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\alpha\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\beta^2 = 0$$

Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \neq 0$, l'équation précédente équivaut à

$$\alpha^2 + 2\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}\alpha\beta + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}\beta^2 = 0$$

2. Le trinôme considéré a pour discriminant

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(2\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}\right)^2 - 4\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)} \\
&= 4\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\right)^2} \\
&= \frac{-4\det \mathrm{H}f(x_0, y_0)}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\right)^2}
\end{aligned}$$

Or f admet un point-selle en (x_0, y_0) donc $\det \mathrm{H}f(x_0, y_0) < 0$ donc $\Delta > 0$. Ainsi l'équation considérée admet deux racines réelles distinctes.

3. Notons λ et μ les racines trouvées à la question précédente. On a

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= -2\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)} \\ \lambda\mu &= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)} \end{cases}$$

ainsi $(\alpha - \lambda\beta)(\alpha + \lambda\beta) = 0$ équivaut à

$$\alpha^2 - (\lambda + \mu)\alpha\beta + \alpha\mu\beta^2$$

ce qui équivaut à

$$\alpha^2 + 2\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}\alpha\beta + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}\beta^2 = 0$$

En vertu de la question 1, cela équivaut à

$$(\alpha \quad \beta)\ \mathrm{H}f\,(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi $\beta = \lambda\alpha$ et $\beta = \lambda\mu$ sont les équations des lignes séparatrices de col dans un repère local centré en (x_0, y_0). Les valeurs de λ et μ se calculent comme suite à la quesiton précédente :

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)} - \frac{\sqrt{-\det \mathrm{H}f(x_0, y_0)}}{\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\right|} \\
\mu &= -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)} + \frac{\sqrt{-\det \mathrm{H}f(x_0, y_0)}}{\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\right|}
\end{aligned}$$