Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 2505 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2007-2008
Promotion ESILV 2010

Interrogation du 28/10/2007

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les deux exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Vos réponses doivent être justifiées. Vous pouvez approximer $\sqrt{5}$ par 2.2 pour vos représentations graphiques.

Exercice I (10 points)

Considérons la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2 + y^3 + 2y^2 + xy(x+y+1) \end{array}$$

1. Déterminer le ou les points critiques de f.

2. Déterminer la nature de chaque point critique

3. Esquisser les courbes de niveaux au voisinage de $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right)$ en précisant les équations des lignes séparatrices de col.

Exercice II (10 points)

Soit f une fonction de classe C^2 définie sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f admet un point selle en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$.

1. Démontrer que

$$(\alpha \ \beta) \,\mathrm{H}\, f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

équivaut à

$$\alpha^2 + 2\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}\alpha\beta + \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}\beta^2 = 0$$

2. Démontrer que l'équation suivante a deux solutions réelles distinctes.

$$X^2 \ + \ 2\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}X \ + \ \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)} \ = \ 0$$

3. En déduire que

$$(\alpha \ \beta) \,\mathrm{H}\, f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ (\alpha - \lambda\beta)(\alpha - \mu\beta) = 0$$

et donner une expression de λ et μ en fonction des dérivées partielles secondes de f en (x_0, y_0). En déduire les lignes séparatrices de col de f en (x_0, y_0).