Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 2505 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2007-2008
Promotion ESILV 2010

# Examen du 14/11/2007

*Durée de l'épreuve : 2 heures*

**L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Vos réponses doivent être justifiées. Le barème est donné à titre indicatif. Ce sujet est recto verso.**

## Exercice I (8 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = xz + yz + \sin(x - y)$$

**1.** Mettre sous forme de Gauss les formes quadratiques $q_1$ et $q_2$ définies par :

$$\begin{aligned} q_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 2xy + 2xz + 2yz \\ q_2(x, y, z) &= -x^2 - y^2 + 2xy + 2xz + 2yz \end{aligned}$$

**2.** Déterminer les points critiques de $f$

**3.** Quelle est la nature de ces points critiques ?

**4.** Considérons

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$$

Déterminer le(s) point(s) où $f$ admet un extremum sur $C$.

## Exercice II (6 points)

Considérons $S$, la sphère centrée en $(0, -1, 0)$ de rayon 1, et $A$ le point de coordonnées $(1, 0, 1)$. On se propose de déterminer le point de la sphère $S$ qui est le plus près du point $A$.

**1.** Donner une fonction objectif $f$ et une fonction contrainte $g$, de classes $C^2$, telles que le problème posé se résume à un problème de minimisation de $f$ sous la contrainte $g = 0$.

**2.** Au moyen de la méthode de Lagrange déterminer le point de $S$ qui se trouve le plus près du point $A$.

## Exercice III (6 points)

Considérons $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = e^{-x} - y$$

**1.** Esquisser les courbes de niveau de $f$.

**2.** Soit

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} \\ C_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\} \end{aligned}$$

et

$$C = C_1 \cap C_2$$

Représenter $C$ sur les courbes de niveau et en déduire grahiquement les extrema de $f$.

**3.** Retrouver le résultat précédent en utilisant la méthode du Lagrangien. On ne cherchera pas à verifier les conditions suffisantes d'optimalité.