

Corrigé de la feuille d'exercices 2

Exercices non corrigés en TD

Exercice IV

Le point $(1/2, 1/2, 1/2)$ est un minimum et le point $(-1, -1, 2)$ est un maximum. Pour le démontrer, on choisit la fonction objectif $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (on fait un raisonnement analogue aux exercices I et V) et les contraintes $h_1(x, y, z) = x + y + 2z - 2 = 0$, $h_2(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0$. Il faut donc minimiser/maximiser $f(x, y, z)$ sous les contraintes $h_1(x, y, z) = 0$ et $h_2(x, y, z) = 0$. On calcule alors $\nabla h_1(x, y, z) = (1, 1, 2)$ et $\nabla h_2(x, y, z) = (-2x, -2y, 1)$. On en déduit que les vecteurs $\nabla h_1(x, y, z)$ et $\nabla h_2(x, y, z)$ sont linéairement indépendants pour tous points (x, y, z) satisfaisant ces contraintes. On calcule $\nabla f(x, y, z) + \lambda_1 \nabla h_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla h_2(x, y, z) = (0, 0, 0)$, on a alors :

- soit $\lambda_2 = 1$, alors $\lambda_1 = 0$, d'où $z = -1/2$, contradiction avec $z = x^2 + y^2 \geq 0$.
- soit $x = y$, c'est-à-dire $x + z = 1$ et $z = 2x^2$. Toutes solutions du système sont

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ \lambda_1 = -10/3 \\ \lambda_2 = 8/3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \\ \lambda_1 = -2/3 \\ \lambda_2 = 1/3 \end{cases}$$

On calcule L_{XX} . Pour le point $(x, y, z) = (1/2, 1/2, 1/2)$, on montre que c'est un minimum. En fait, en utilisant la valeur de λ_2 , on déduit que L_{XX} est définie positive, ce qui assure que ce point est un minimum. Pour le point $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$, on peut montrer que c'est un maximum.

Exercice V

1. Soit $g(x) = 4x^3 + x - 1$, la fonction est polynomiale donc dérivable et $g'(x) = 12x^2 + 1 > 0$ ainsi g est strictement croissante. En outre $\lim_{-\infty} g = -\infty$, $\lim_{+\infty} g = +\infty$ et g est continue. Ainsi g réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , elle a donc une seule racine. Comme $g(\frac{1}{2}) = 0$ on a $\frac{1}{2}$ comme unique racine de g .

2. Soit (x, y, z) un point du paraboloïde. La distance de ce point à $(1, 1, 0)$ est

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$$

or $z = x^2 + y^2$ ainsi cette distance se ré-écrit $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x^2 + y^2)^2}$. Il s'agit de trouver (x, y) qui minimise cette fonction. Comme $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et que la distance est positive, il convient de minimiser la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x^2 + y^2)^2$. On a

$$\nabla f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x - 1 + 2x(x^2 + y^2) \\ y - 1 + 2y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

ainsi (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} x - 1 + 2x(x^2 + y^2) = 0 \\ (x - y) + 2(x^2 + y^2)(x - y) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} (x-y)(1+2x^2+2y^2) = 0 \\ x-1+2x(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x = y \\ 4x^3 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

en vertu de la question 1, ce système équivaut à $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Par ailleurs,

$$\text{H}f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} 1+6x^2+2y^2 & 4xy \\ 4xy & 1+6y^2+2x^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\text{H}f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

le déterminant de cette matrice est $32 > 0$ et la trace est $12 > 0$ donc la matrice a deux valeurs propres strictement positives, par suite $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est un minimum de f .

Exercice IX

Considérons la fonction L définie sur \mathbb{R}^5 par

$$L(x, y, z, \lambda, \alpha) = x^2 + 5xy - \frac{5}{96}z^3 - \lambda(x + y + z - 5 + \alpha^2)$$

Le point $(x, y, z, \lambda, \alpha)$ est critique si et seulement si $\nabla L(x, y, z, \lambda, \alpha) = 0$ ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 2x + 5y - \lambda = 0 \\ 5x - \lambda = 0 \\ -\frac{5}{32}z^2 - \lambda = 0 \\ x + y + z - 5 + \alpha^2 = 0 \\ \alpha\lambda = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda = -\frac{5}{32}z^2 \\ x = -\frac{1}{32}z^2 \\ y = -\frac{1}{32}z^2 + \frac{1}{80}z^2 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2x + 5y = 0 \\ 5x = 0 \\ -\frac{5}{32}z^2 = 0 \\ x + y + z - 5 + \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ (z-10)^2 = 0 \\ x = -\frac{1}{32}z^2 \\ y = -\frac{3}{160}z^2 \\ \lambda = -\frac{5}{32}z^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha^2 = 5 \\ (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda = -\frac{125}{8} \\ (x, y, z) = (-\frac{25}{8}, -\frac{15}{8}, 10) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha^2 = 5 \\ (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Il y a donc deux points candidats à être minimum sous la contrainte indiquée : $(-\frac{25}{8}, -\frac{15}{8}, 10)$ et $(0, 0, 0)$.