Pôle Universitaire Léonard de Vinci | S2 – Année 2005-2006
CS 103 – Analyse I | Promotion ESILV 2010

Méthode de Newton

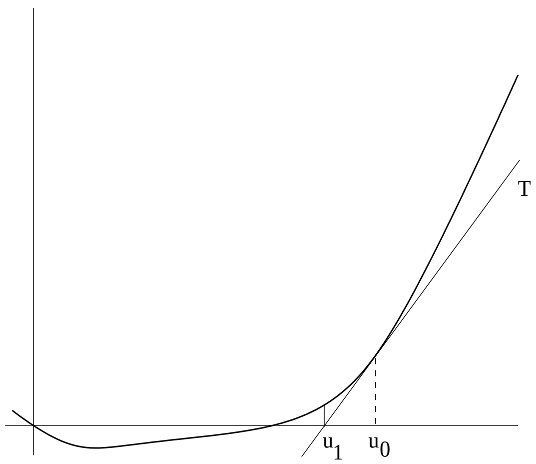
Etude numérique des solutions de $\cos x = x$

Rappel de la méhode de Newton : Soit $g(x) = \cos x - x$, la fonction dont on cherche la racine. On considère

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)} \end{cases}$$

On note $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On a vu dans le cours que $\lim u_n = \alpha$.

Graphiquement, il faut interpréter cette suite de la manière suivante. On part d'un point $(u_0, f(u_0))$. On trace la tangente a la courbe en ce point, on appelle u_1 l'abscisse de l'intersection avec l'axe des abscisses. En itérant ce processus on à une suite convergent vers la racine.



Algorithme :

- $\varepsilon := 10^{-8}$ (précision)
- Choix de u_0, $U := u_0$
- Tant que $|f(U)| > \varepsilon$ faire $U := U - \frac{g(U)}{g'(U)}$
- Le résultat est dans U

Localisation de la racine α : L'équation $\cos x = x$ n'a pas de solution dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ puisque sur cet ensemble $|\cos x| \leq 1$ alors que $|x| > 1$. En outre l'équation n'a pas de solution dans $[-1, 0]$ puisque $\cos x > 0$ et $x \leq 0$ sur cet intervalle. Enfin 1 n'est pas solution de l'équation. Donc

$$\text{si } \cos x = x \text{ admet une solution alors } x \in I =]0; 1[$$

L'application g est dérivable, sa dérivée est $g'(x) = -(1 + \sin x)$ qui est strictement négative sur I. Ainsi g est strictement décroissante et continue sur I. En conséquence elle ŕealise une bijection de $]0; 1[$ sur $[g(1); g(0)]$. Comme $\lim_{x\to 0} g(x) > 0$ et $\lim_{x\to 1} g(x) < 0$, le réel 0 a un antécédant unique $\alpha \in I$.

Application de la méthode de Newton : On obtient les resultats suivants.

Itération 0	$u_0 = 0.5000000000$
Itération 1	$u_1 = 0.7552224170$
Itération 2	$u_2 = 0.7391416661$
Itération 3	$u_3 = 0.7390851339$

On trouve le résultat suivant (à 10^{-8} près)

$$\alpha \simeq 0.7390851339$$

Comparaison avec la dichotomie : On fait une dichotomie c'est-à-dire qu'on part de I et à chaque étape on observe le signe de g au milieu de l'intervalle et on ré-itére sur la moitíe de l'intervalle dans laquelle se trouve la racine. On obtient les resultats suivants :

Itération 1	$x = 0.5000000000$
Itération 2	$x = 0.7500000000$
Itération 3	$x = 0.6250000000$
Itération 4	$x = 0.6875000000$
Itération 5	$x = 0.7187500000$
Itération 6	$x = 0.7343750000$
Itération 7	$x = 0.7421875000$
Itération 8	$x = 0.7382812500$
Itération 9	$x = 0.7402343750$
Itération 10	$x = 0.7392578125$
Itération 11	$x = 0.7387695312$
Itération 12	$x = 0.7390136718$
Itération 13	$x = 0.7391357421$
Itération 14	$x = 0.7390747069$
Itération 15	$x = 0.7391052244$
Itération 16	$x = 0.7390899656$
Itération 17	$x = 0.7390823362$
Itération 18	$x = 0.7390861509$
Itération 19	$x = 0.7390842435$
Itération 20	$x = 0.7390851972$
Itération 21	$x = 0.7390847204$
Itération 22	$x = 0.7390849588$
Itération 23	$x = 0.7390850780$
Itération 24	$x = 0.7390851376$
Itération 25	$x = 0.7390851078$
Itération 26	$x = 0.7390851227$

On trouve le résultat suivant (à 10^{-8} près)

$$\alpha \simeq 0.7390851227$$

On remarque qu'il faut 26 itérations au lieu de 4. L'utilisation d'un ordinateur permettant de calculer avec plus de decimales, on peut obtenir une valeur approchée à 10^{-100} en 7 itérations avec la méthode de Newton alors qu'il faut 331 itérations avec une dichotomie.