Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Interrogation du 08/03/2006

Corrigé

Exercice I

1. La fonction f est dérivable comme fonction polynomiale et sa dérivée est $f'(x) = 2(1-2x)$. On en déduit que f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Par suite, sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction f admet comme minimum $f(0) = f(1) = 0$ et comme maximum $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Ainsi pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) \in [0,1]$, c'est-à-dire $f([0,1]) \subset [0,1]$.

2. Notons $(\mathcal{H}_n)$ l'hypothèse $u_n \in [0,1]$. Montrons cette hypothèse par récurrence

- Par hypothèse $u_0 \in [0,1]$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vérifiée.
- Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie alors $u_n \in [0,1]$, en vertu de la question précédente

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$$

  donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vérifiée.

On a donc (u_n) minorée par 0 et majorée par 1.

3. Le réel x est un équilibre de (1) si et seulement si $f(x) = x$, c'est-à-dire

$$x(1-2x) = 0$$

ce qui équivaut à

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

ainsi les équilibres de (1) sont $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

4. On a $|f'(0)| = 2 > 1$ donc 0 est un équilibre instable (répulsif) et $|f'(\frac{1}{2})| = 0 < 1$ donc $\frac{1}{2}$ est un équilibre stable (attractif).

5. On a

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n \left(\frac{1}{2} - u_n\right)$$

Si $u_n \leq \frac{1}{4}$ alors

$$\frac{1}{2} - u_n \geq \frac{1}{4} \geq 0$$

par suite $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante tant que $u_n \leq \frac{1}{4}$.

Si (u_n) est majorée par $\frac{1}{4}$ alors elle est convergente et sa limite appartient à $]u_0, \frac{1}{4}[$ ce qui est impossible puisqu'il n'y a pas d'équilibre dans cet intervalle. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \frac{1}{4}$.

On a $|f'(x)| < 1$ si et seulement si $x \in I$ où $I =]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$. Remarquons que $\frac{1}{2}$ est dans cet intervalle, c'est un équilibre stable. Le bassin d'attraction de $\frac{1}{2}$ est l'intervalle I, or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in I$, donc $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice II

1. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$-1 - \frac{\varepsilon}{2} \in]-1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\text{ et } -1 - \frac{\varepsilon}{2} \notin E$$

donc $]-1-\varepsilon, 1+\varepsilon[not \cap E$, ainsi E n'est pas un voisinage de -1.

2. On a

$$]0-1, 0+1[\subset E$$

$$]0.99 - 0.01, 0.99 + 0.01[\subset E$$

ainsi E est un voisinage de 0 et de 0.99.

3. L'ensemble E n'est pas voisinage de -1 qui est pourtant l'un de ses points, ce n'est donc pas un ouvert.

4. L'ensemble F n'est pas un voisinage de -2 puisque $-2 \notin F$.

5. Soit $x \in F$, notons $d_1 = |x - (-2)| = 2 + x > 0$ et $d_2 = |x - 2| = 2 - x > 0$, posons $\varepsilon = \min\{d_1, d_2\}$ alors

$$\begin{cases} x + \varepsilon \leq x + d_2 < 2 \\ x - \varepsilon \geq x - d_2 > -2 \end{cases}$$

donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset F$ donc F est un voisinage de x. Par suite F est voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ouvert.

6. On a $E \subset F$ donc $E \cup F = F$ qui est un ouvert.

7. On a $E \subset F$ donc $E \cap F = E$ qui n'est pas un ouvert.

8. On a $E \setminus F = \emptyset$. C'est un ouvert.

Exercice III

1. Soit n le nombre de voisinages considérés, notons $V_1, \ldots, V_n$ ces voisinages. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $]x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i[\subset V_i$. Soit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ alors

i) $\varepsilon > 0$

ii) $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V_1 \cap \ldots \cap V_n$

donc $V_1 \cap \ldots \cap V_n$ est donc un voisinage de x.

2. La proposition précédente est fausse si on enlève le mot "finie", considérons par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $V_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. Soit $W = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$. On a $0 \in W$, supposons l'existence de $a \neq 0$ dans W alors pour $n = \mathrm{E}(\frac{1}{|a|}) + 1$, on a $|a| > \frac{1}{n}$ donc $a \notin V_n$ donc $a \notin W$. Il en résulte que $W = \{0\}$, ce n'est pas un voisinage de 0. Pourtant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a V_n voisinage de 0.