

## Interrogation du 08/03/2006

*Durée de l'épreuve : 1 heure 15*

**L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.**

### Exercice I (7 points)

Notons  $f$  l'application définie par  $f(x) = 2x(1 - x)$  et considérons la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n) \tag{1}$$

La condition initiale  $u_0$  appartient à  $[0, 1]$ .

1. Montrer que  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ .
2. Montrer que  $(u_n)$  est bornée.
3. Déterminer les équilibres de (1).
4. Etudier la nature des équilibres trouvés à la question précédente.
5. Déterminer  $\lim u_n$ , discuter en fonction de  $u_0$  si nécessaire.

### Exercice II (9 points)

Considérons les ensembles  $E$  et  $F$  définis par

$$E = [-1, 1] \text{ et } F = ]-2, 2[$$

1. L'ensemble  $E$  est-il un voisinage de  $-1$  ?
2. L'ensemble  $E$  est-il un voisinage de  $0$  ? Un voisinage de  $0.99$  ?
3. L'ensemble  $E$  est-il un ouvert ?
4. L'ensemble  $F$  est-il un voisinage de  $-2$  ?
5. L'ensemble  $F$  est-il un ouvert ?
6. L'ensemble  $E \cup F$  est-il un ouvert ?
7. L'ensemble  $E \cap F$  est-il un ouvert ?
8. L'ensemble  $E \setminus F$  est-il un ouvert ?

**Exercice III** (4 points)

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Redémontrer ce résultat du cours : une intersection finie de voisinages de  $x$  est un voisinage de  $x$ .
2. La proposition précédente est-elle vraie si on enlève le mot “finie” ? Faire une démonstration ou donner un contre-exemple.