

Interrogation du 08/03/2006

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (7 points)

Notons f l'application définie par $f(x) = 2x(1 - x)$ et considérons la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n) \tag{1}$$

La condition initiale u_0 appartient à $[0, 1]$.

1. Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.
2. Montrer que (u_n) est bornée.
3. Déterminer les équilibres de (1).
4. Etudier la nature des équilibres trouvés à la question précédente.
5. Déterminer $\lim u_n$, discuter en fonction de u_0 si nécessaire.

Exercice II (9 points)

Considérons les ensembles E et F définis par

$$E = [-1, 1] \text{ et } F =]-2, 2[$$

1. L'ensemble E est-il un voisinage de -1 ?
2. L'ensemble E est-il un voisinage de 0 ? Un voisinage de 0.99 ?
3. L'ensemble E est-il un ouvert ?
4. L'ensemble F est-il un voisinage de -2 ?
5. L'ensemble F est-il un ouvert ?
6. L'ensemble $E \cup F$ est-il un ouvert ?
7. L'ensemble $E \cap F$ est-il un ouvert ?
8. L'ensemble $E \setminus F$ est-il un ouvert ?

Exercice III (4 points)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Redémontrer ce résultat du cours : une intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x .
2. La proposition précédente est-elle vraie si on enlève le mot “finie” ? Faire une démonstration ou donner un contre-exemple.