Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Interrogation du 3/01/2006

Corrigé

Exercice I

Si $a = 0$ alors pour tout entier n on a $u_n = 0$ donc $\lim u_n = 0$. Supposons $a \neq 0$ alors

$$u_n = \frac{an^2}{n^2+1} \frac{\sin\left(\frac{a}{n^2+1}\right)}{\frac{a}{n^2+1}}$$

Soit $X = \frac{a}{n^2+1}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ et $\lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$ donc

$$\lim \frac{\sin\left(\frac{a}{n^2+1}\right)}{\frac{a}{n^2+1}} = 1$$

En outre, $\lim \frac{an^2}{n^2+1} = a$ (limite du quotient des termes de plus haut degrés), donc $\lim u_n = a$.

Conclusion : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim u_n = a$.

Exercice II

Soit $\varepsilon > 0$, posons $N = \max\{\mathrm{E}(\exp(2/\varepsilon)) - 1, 0\}$,

$$\begin{array}{lll} \text{on a} & n \geq N & \Rightarrow & n \geq \exp\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - 2 \\ \text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & n+2 \geq \exp\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ \text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & \ln(n+2) \geq \frac{2}{\varepsilon} \\ \text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & \frac{1}{\ln(n+2)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & \left|\frac{2}{\ln(n+2)}\right| \leq \varepsilon \\ \text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & |u_n + 1| \leq \varepsilon \end{array}$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - (-1)| \leq \varepsilon$$

donc $\lim u_n = -1$.

Exercice III

1. On a

$$\Pi_{j=0}^{i} u_j = u_0 \dots u_i$$

donc

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\Pi_{j=0}^{i} u_j} = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \frac{1}{u_0 u_1 u_2} + \cdots + \frac{1}{u_0 u_1 u_2 \dots u_n}$$

2. On a
$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$
Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$. On a
$$v_n = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$
ce qui donne le résultat voulu.

3. On a
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_{n+1}} > 0$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, on a $u_i \geq 2$ donc $u_0 u_1 \dots u_k \geq 2^{k+1}$, ainsi
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_k} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$
ainsi
$$v_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$
en raisonnant comme à la question 2, il vient
$$v_n \leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$
par suite $v_n < 1$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, image de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par ϕ est croissante et majorée, elle est donc convergente. On a $v_n \leq 1$ pour tout entier n donc
$$\lim v_n \leq 1$$
En outre $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc $v_n > v_0 = \frac{1}{u_0}$, donc $\lim v_n \geq \frac{1}{u_0}$ ainsi
$$\lim v_n > 0$$
On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que
$$\lim v_n \in]0, 1]$$