Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Interrogation du 3/01/2006

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (7 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = n^2 \sin\left(\frac{a}{n^2+1}\right)$$

Discuter selon a si cela est nécessaire.

Exercice II (6 points)

En utilisant la définition de la limite, étudier la limite de (u_n) définie par

$$u_n = -1 + \frac{2}{\ln(n+2)}$$

Exercice III (7 points)

Notons A l'ensemble des suites croissantes de nombres entiers

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

telles que $u_0 \geq 2$. Soit ϕ l'application de A dans l'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini pour tout $u \in A$ par $\phi(u) = v$ où $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\Pi_{j=0}^{i} u_j}$$

1. Exprimez v_n au moyen de points de suspensions.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à 2. Déterminer $\phi(u)$.

3. Montrer que pour tout $u \in A$, la suite $\phi(u)$ admet une limite réelle dans $]0, 1]$.