Pôle Universitaire Léonard de Vinci
 S2 – Année 2005-2006
CS 103 – Analyse I
 Promotion ESILV 2010

Examen du 13/04/2006

Corrgié

Exercice I

1.

Intérieur : $\overset{\circ}{A} =]-2,-1[$.
En effet A n'est pas voisinage de -2 ni des entiers naturels, les autres éléments de $]-2,-1[$ admettent A comme voisinage.

Adhérence : $\overline{A} = [-2,-1] \cup \mathbb{N}$.
En effet la suite $u_n = -1 - \frac{1}{n}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers -1. Les éléments qui ne sont pas dans $[-2,-1] \cup \mathbb{N}$ sont a distance strictement positive de A et ne peuvent pas être dans l'adhŕence.

Frontière : $\partial A = \mathbb{N} \cup \{-2,-1\}$.
En effet $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Points isolés et d'accumulation : $A^* = \mathbb{N} \setminus \{-2,-1\}$ et $A' = [-2,-1]$.
En effet, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{-2,-1\}$ on a $]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\cap A = \{n\}$ donc n est isolé, d'autre part tous les points de $[-2,-1]$ sont d'accumulation puisque pour tout x dans cet intervalle

$$\forall \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Comme $A^* \cup A' = \overline{A}$ et $A^* \cap A' = \emptyset$, on en déduit le résultat annoncé.

2. L'ensemble A n'est pas compact puisqu'il n'est pas fermé ($A \neq \overline{A}$) et qu'il n'est pas borné (l'un des deux suffisait pour qu'il ne soit pas compact).

3. On a $A \cap]-1,1[= \{0\}$. Cet ensemble est constitué d'un seul point qui est isolé, il n'admet donc pas de point d'accumulation. Le théorème de Bolzano-Weirstrass ne s'applique pas puisque $\{0\}$ n'est pas un ensemble infini.

Exercice II

1. Distinguons plusieurs cas

- Si $a \geq 1$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ contient $a + \frac{\varepsilon}{2}$, pourtant $a + \frac{\varepsilon}{2} \notin E_a$. Ainsi $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\not\subset E_a$. Ainsi E_a n'est pas un voisinage de a qui est l'un de ses points, ce n'est pas un ouvert.
- Si $a \leq -1$ alors un raisonnement analogue montre que E_a n'est pas un ouvert.
- Si $a \in]-1,0[\cup]0,1[$ alors $E_a =]-1,0[\cup]0,1[$ est la réunion de deux ouverts, c'est donc un ouvert.
- Si $a = 0$ alors $E_a =]-1,1[$ est un ouvert.

Conclusion : E_a est un ouvert si et seulement si $a \in]-1,1[$.

2. La distinction de deux cas suffit pour démontrer que E_a n'est jamais un fermé.

- Si $a \neq 0$ alors la suite $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 1$ est une suite d'éléments de E_a qui converge vers $0 \notin E_a$, donc E_a n'est pas un fermé.
- Si $a = 0$ alors $E_a =]-1, 1[$. La suite $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ est une suite d'éléments de E_a qui converge vers $1 \notin E_a$, donc E_a n'est pas un fermé.

3. Distinguons plusieurs cas

- Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors $\overset{\circ}{E_a} =]-1, 0[\cup]0, 1[$ et $\overline{E_a} = [-1, 1] \cup \{a\}$
- Si $a \in [-1, 0[\cup]0, 1]$ alors $\overset{\circ}{E_a} =]-1, 0[\cup]0, 1[$ et $\overline{E_a} = [-1, 1]$
- Si $a = 0$ alors $\overset{\circ}{E_a} =]-1, 1[$ et $\overline{E_a} = [-1, 1]$

4. Considérons la frontière

- Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors $\partial E_a = \{-1, 0, 1, a\}$
- Si $a \in [-1, 0[\cup]0, 1]$ alors $\partial E_a = \{-1, 0, 1\}$
- Si $a = 0$ alors $\partial E_a = \{-1, 1\}$

Considérons les points isolés

- Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors ${E_a}^* = \{a\}$
- Si $a \in [-1, 1]$ alors ${E_a}^* = \emptyset$

En ce qui concerne les points d'accumulation, dans tous les cas on a $A' = [-1, 1]$.

Exercice III

1. NON. Prenons comme contre-exemple $A = [0, 1]$ et $B =]0, 1[$ alors

$$\begin{array}{ccccc} \overline{A} & = & [0,1] & = & \overline{B} \\ \overset{\circ}{A} & = &]0,1[& = & \overset{\circ}{B} \\ A^* & = & \emptyset & = & B^* \\ A' & = & [0,1]t & = & B' \end{array}$$

Pourtant $A \neq B$.

2. OUI. En effet $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{B} \setminus \overset{\circ}{B} = \partial B$.

Exercice IV

1. Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel, alors il existe deux entiers p et q premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire

$$p^2 = 2q$$

cela entraine que 2 divise p^2 et donc que 2 divise p, ce dernier peut donc s'écrire $2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, il en résulte $4k^2 = 2q^2$, c'est-à-dire

$$2k^2 = q^2$$

cela entraine que 2 divise q^2 et donc que 2 divise q. Par suite 2 divise simultanément p et q ce qui contredit que p et q sont premiers entre eux. [Fin du raisonnement par l'absurde]

On a donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. L'ensemble G est inclus dans $\mathbb{R}$, il suffit donc de démontrer que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. On a $0 \in G$ donc $G \neq \emptyset$. Soit x et x' deux éléments de G alors

$$\begin{array}{ll} \exists (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, & x = am + n \\ \exists (n',m') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, & x' = am' + n' \end{array}$$

il vient

$$x - x' = a(m - m') + (n - n')$$

or $m - m' \in \mathbb{Z}$ et $n - n' \in \mathbb{Z}$ donc $x - x' \in G$. Il en résulte que $(G, +)$ est un groupe.

3. Raisonnons par l'absurde, supposons que $\forall \alpha > 0, G \not\subset \{k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas vrai, c'est-à-dire que $\exists \alpha > 0, G \subset \{k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$, alors

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ m\sqrt{2} + n = k\alpha$$

En particulier pour $m = 0$ et $n = 1$, il existe un entier relatif k manifestement non nul tel que $1 = k\alpha$ donc $\alpha = \frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$. Considérons maintenant $m = 1$ et $n = 0$, il existe un entier relatif k tel que $\sqrt{2} = k\alpha$ donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est exclu, en vertu de la question 1. [Fin du raisonnement par l'absurde]

4. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $G \cap]0, +\infty[$ admete un plus petit élément α. Soit $x \in G$. Notons $\lambda = \frac{x}{\alpha}$ et $k = \mathrm{E}(\lambda)$. On a

$$k \leq \lambda < k + 1$$

donc $k\alpha \leq \lambda\alpha < (k+1)\alpha$, ce qui donne

$$k\alpha \leq x < (k+1)\alpha$$

Notons $y = x - k\alpha$, alors

$$0 \leq y < \alpha$$

Comme G est un groupe $\alpha \in G$ et $k \in \mathbb{Z}$ entraine $k\alpha \in G$, or $x \in G$ donc $x - k\alpha \in G$, ainsi $y \in G$. Mais α est le plus petit élément de $G \cap]0, +\infty[$ donc $y \notin G \cap]0, +\infty[$ donc $y \notin]0, +\infty[$ donc $y = 0$ par suite

$$x = k\alpha$$

donc $G \subset \{k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$ ce qui est en contradiction avec la question précédente. [Fin du raisonnement par l'absurde]

5. Rappelons que G admet un plus petit élément si et seulement si

$$\exists \eta \in G,\ \forall x \in G, x \geq \eta$$

Comme $G \subset]0, +\infty[$ n'admet pas de plus petit élément, on a

$$\forall \eta \in G,\ \exists x \in G,\ x < \eta$$

En particulier pour $\eta = \varepsilon$, $G \cap]0, \varepsilon[\neq \emptyset$.

6. Soit x et y deux réels avec $x < y$. En vertu de la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de G dans $]0, \varepsilon[$. En particulier pour $\varepsilon = y - x$,

$$\exists g \in G,\ g \in]0, y - x[$$

Notons $k = \mathrm{E}(\frac{y}{g})$ alors

$$\begin{cases} k \leq \frac{y}{g} \text{ donc } kg \leq y \\ \frac{y}{g} < k + 1 \text{ donc } y < kg + g \text{ donc } y - g < kg \text{ or } g \in]0, y - x[\Rightarrow x < y - g \text{ ainsi } x < kg \end{cases}$$

Par suite $x < kg \leq y$. Comme $kg \in G$, cela démontre la densité de G dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, en vertu de la densité de G dans $\mathbb{R}$ on a $\forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap G \neq \emptyset$. Ainsi $x \in \overline{G}$. Cela établit que $\overline{G} = \mathbb{R}$.