Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Examen du 13/04/2006

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Les réponses doivent être justifiées sauf dans les questions 3 et 4 de l'exercice II.

Exercice I (5 points)

On considère l'ensemble

$$A = [-2, -1[\cup \mathbb{N}$$

1. Quel est son intérieur, son adhérence, sa frontière, son ou ses points isolés et son ou ses points d'accumulation ?

2. L'ensemble A est-il compact ?

3. L'ensemble $A \cap]-1, 1[$ admet-il des points d'accumulation ? Le théorème de Bolzano-Weirstrass peut-il être appliqué ?

Exercice II (6 points)

Soit a un nombre réel et

$$E_a =]-1, 0[\cup]0, 1[\cup \{a\}$$

Dans les questions suivantes, on discutera en fonction de a, si cela est nécessaire.

1. L'ensemble E_a est il un ouvert ?

2. L'ensemble E_a est il un fermé ?

3. Dites ce que vallent $\mathring{E}_a$ et $\overline{E_a}$, sans justifier votre réponse.

4. Dites ce que vallent E_a^*, E_a' et ∂E_a, sans justifier votre réponse.

Exercice III (3 points)

Soit A et B deux ensembles tels que

$$\overline{A} = \overline{B},\ \mathring{A} = \mathring{B},\ A^* = B^* \text{ et } A' = B'$$

1. A-t-on forcément $A = B$? Faire une démonstration ou donner un contre-exemple.

2. A-t-on forcément $\partial A = \partial B$? Faire une démonstration ou donner un contre-exemple.

Exercice IV (6 points)

Soit

$$G = \{m\sqrt{2} + n,\ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer que $(G, +)$ est un groupe.

3. Montrer que $\forall \alpha > 0,\ G \not\subset \{k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Montrer que $G \cap]0, +\infty[$ n'admet de plus petit élément.

5. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, il existe un élément de G dans $]0, \varepsilon[$.

6. Montrer que $\overline{G} = \mathbb{R}$.