Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S1 – Année 2005-2006
CS 103 – Analyse I — Promotion ESILV 2010

Examen du 1/02/2006

Corrigé

Exercice I

Soit $u_n = \frac{n}{\sqrt{(n-1)!}}$, cette suite est à termes strictement positifs pour $n \geq 1$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{\sqrt{n!}}}{\frac{n}{\sqrt{(n-1)!}}} = \frac{n+1}{n}\sqrt{\frac{(n-1)!}{n!}} = \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$$

donc $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$. Le critère de d'Alembert permet d'affirmer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

Exercice II

1. Soit $\varepsilon > 0$.

- Si $\varepsilon \geq 1$ alors $\frac{1}{2^n+1} \leq \varepsilon$ puisque $2^n - 1 \geq 1$, posons $N = 0$ alors $n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$.
- Si $\varepsilon \in]0,1[$ alors posons $N = \mathrm{E}\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}{\ln 2}\right) + 1$,

$$\begin{array}{llll}
\text{alors} & n \geq N & \Rightarrow & n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}{\ln 2} \\
\text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & n\ln 2 \geq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \\
\text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & \ln 2^n \geq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \\
\text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & 2^n \geq \frac{1}{\varepsilon}-1 \\
\text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & 2^n + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \\
\text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & \frac{1}{2^n+1} \leq \varepsilon \\
\text{donc} & n \geq N & \Rightarrow & \left|\frac{1}{2^n+1}\right| \leq \varepsilon
\end{array}$$

  ainsi $n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$.

Cela établit que $\forall\varepsilon < 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$, ainsi $\lim u_n = 0$.

2. La convergence de (u_n) vers 0 n'entraine pas la convergence de la série associée (par exemple $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge alors que $\lim \frac{1}{n} = 0$), en revanche c'est une condition nécessaire de convergence de cette série (la différence de deux termes consécutifs de la somme partielle (S_N) donne que si (S_N) converge alors $\lim u_n = 0$).

3. On a $2^n + 1 \geq 2^n$ donc $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La suite (u_n) est positive, elle est majorée par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. La série géomtétrique $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/2^n$ converge puisque $|\frac{1}{2}| < 1$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/2^n$ converge.

Exercice III

1. Si $\alpha > 0$ alors posons $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \frac{1}{n^\alpha+1}$. On a $u_n = a_n b_n$ et

i) Pour tous entiers naturels p et q avec $q \geq p$ on a

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n \right| \leq 1$$

ii) La suite (b_n) est décroissante

iii) La suite (b_n) est positive

iv) La suite (b_n) converge vers 0

En vertu du théorème d'Abel la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

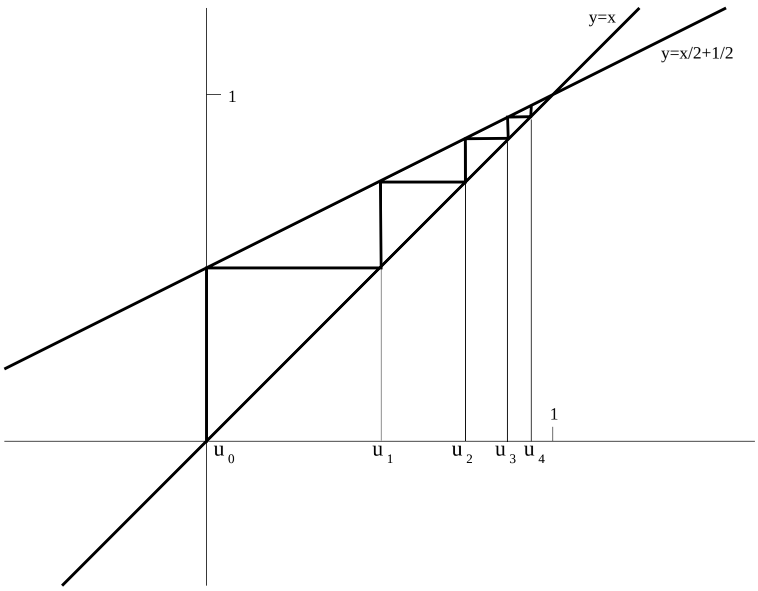
Si $\alpha \leq 0$ alors considérons les suites extraites $v_n = u_{2n+1}$ et $w_n = u_{2n}$. Si $\alpha = 0$ alors $v_n = -1$ et $w_n = 1$ pour tout entier n, elles convergents donc respectivement vers -1 et 1. Si $\alpha < 0$ la suite (v_n) tend vers $-\infty$ et la suite (w_n) converge vers $+\infty$. Par suite, (u_n) diverge et la série associée est donc divergente également.

Conclusion : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$

2. On a $|u_n| = \frac{1}{n^\alpha+1} \sim \frac{1}{n^\alpha}$, ces suites sont positives et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si seulement si $\alpha > 1$, en vertu du théorème d'équivalence, $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice IV

1. On trace sur un même graphe les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.



Il semble que $u_1 \simeq 0.5$, $u_2 \simeq 0.7$, $u_3 \simeq 0.8$, $u_4 \simeq 0.9$. On conjecture que la limite de la suite est 1.

2. Soit $(\mathcal{H}_n)$ l'hypothèse de récurrence $u_n \in [0,1]$.

- $(\mathcal{H}_0)$ est vraie par définition de u_0.
- Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie alors $0 \leq u_n \leq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} \leq 1$ donc $u_{n+1} \in [0,1]$ donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

Cette démonstration par récurrence démontre que pour tout entier naturel n on a $u_n \in [0,1]$.

3. On a $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - u_n) \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente. Notons $l \in \mathbb{R}$ sa limite, on a $l = \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2}l = \frac{1}{2}$ donc $l = 1$. On a donc $\lim u_n = 1$ ce qui démontre la conjecture de la question 1.