Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Devoir 4

Corrigé

Exercice I

Pour montrer que "soit une proposition est vraie soit une autre proposition est vraie" (ou exclusif) il s'agit de montrer que l'une ou l'autre est vraie et que les deux propositions ne sont pas vraies simultanément.

Montrons que l'une des deux propositions est vraie. Soit la proposition

$$(P) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists (x,y) \in A^2, x \neq y, |y-x| < \varepsilon$$

est vraie, soit elle fausse.

Supposons que (P) soit vraie alors soit $\varepsilon > 0$ et x et y deux éléments tels que $|y-x| < \varepsilon$, sans perte de généralité on peut supposer $x < y$. Notons $h = y - x$, on a $h \in]0, \varepsilon[$.

Soit $n = E(\frac{x}{h})$ et $n = \frac{x}{h} - 1$ si x est un multiple de h, on a $n < \frac{x}{h} \leq n+1$ donc $nh < x \leq nh+h$ donc $-nh - h \leq -x < -nh$ donc $x - nh - h \leq 0 < x - nh$ donc $0 < x - nh \leq h$. Posons alors $z = x - nh$, il vient $z \in]0, h[\subset]0, \varepsilon[$.

En outre G étant un groupe $h = y - x \in G$ donc $nh \in G$ donc $z = x - nh \in G$, par suite $G \cap]0, \varepsilon[\neq \emptyset$.

Nous avons démontré que

$$\forall \varepsilon > 0,]0, \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

a fortiori on a

$$\forall \varepsilon > 0,]-\varepsilon, \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

donc $0 \in \overline{A}$.

Supposons que (P) soit fausse alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall (x,y) \in A$, $|y-x| \geq \varepsilon$, en particulier $\forall x \in A, [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap A = \{x\}$ *a fortiori*,

$$\forall x \in A,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \{x\}$$

donc x est isolé. Ainsi tous les points de A sont isolés. Soit alors $M \in A$, l'intervalle $A \cap]0, M]$ contient un nombre fini d'éléments (au plus $\mathrm{E}(\frac{M}{\varepsilon}) + 1$ éléments) donc $A \cap]0, M]$ admet un plus petit élément.

Montrons que les deux propositions ne sont pas vraies simultanément. Raisonnons par l'absurde, supposons que $0 \in \overline{A}$ et que A admette un plus petit élément η. Comme $\eta \in A \subset]0, +\infty[$ on a $\eta > 0$. Comme η est un plus petit élément de A, pour tout $x < \eta$ on a $x \notin A$ donc

$$]0, \eta[\cap A = \emptyset$$

Par ailleurs $A \subset]0, +\infty[$ donc $]-\eta, \eta[\cap A = \emptyset$ ce qui est en contradiction avec 0 est adhérent à A.

Exercice II

1. Pour montrer $G = \{k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$, il faut montrer l'inclusion dans un sens puis dans l'autre.

Inclusion réciproque ($\supset$). Soit $x \in \{k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = k\alpha$.

- Si $k = 0$ alors $x = 0$ est l'élément neutre de G donc $x \in G$
- Si $k > 0$, alors $x = \alpha + \alpha + \cdots + \alpha$ (k fois). Par stabilité de l'addition on a $x \in G$.
- Si $k < 0$, alors $x = (-\alpha) + (-\alpha) + \cdots + (-\alpha)$ ($|k|$ fois). On a $-\alpha \in G$ puisque $\alpha \in G$ et par stabilité de l'addition on a $x \in G$.

ainsi $x \in G$.

Inclusion directe ($\subset$). Soit $x \in G$. Notons $\lambda = \frac{x}{\alpha}$ et $k = \mathrm{E}(\lambda)$. On a

$$k \leq \lambda < k + 1$$

donc $k\alpha \leq \lambda\alpha < (k+1)\alpha$, ce qui donne

$$k\alpha \leq x < (k+1)\alpha$$

Notons $y = x - k\alpha$, alors

$$0 \leq y < \alpha$$

Comme G est un groupe $\alpha \in G$ et $k \in \mathbb{Z}$ entraine $k\alpha \in G$, or $x \in G$ donc $x - k\alpha \in G$, ainsi $y \in G$. Mais α est le plus petit élément de $G \cap]0, +\infty[$ donc $y \notin G \cap]0, +\infty[$ donc $y \notin]0, +\infty[$ donc $y = 0$ par suite

$$x = k\alpha$$

2. Soit G tel que $G \cap]0, +\infty[$ n'admette pas un plus petit elément, alors en vertu du premier exercice, 0 est dans l'adhérence de $G \cap]0, +\infty[$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de G dans $]0, \varepsilon[$.

3. Commençons par remarquer que G ne peut pas être simultanément monogène et dense dans $\mathbb{R}$ puisque s'il est monogène, de géngérateur α alors il n'existe pas d'élement de G dans l'intervalle $]0, \alpha[$. Montrons maintenant que G est monogène ou dense dans $\mathbb{R}$.

- Si $G \cap]0, +\infty[$ admet un plus petit élément alors G est monogène, en vertu de la question 1.
- Sinon, $G \cap]0, +\infty[$ n'admet pas un plus petit élément. Soit x et y deux réels avec $x < y$. En vertu de la question 2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de G dans $]0, \varepsilon[$. En particulier pour $\varepsilon = y - x$,

  $$\exists g \in G,\ g \in]0, y - x[$$

  Notons $k = \mathrm{E}(\frac{y}{g})$ alors

  $$\begin{cases} k \leq \frac{y}{g} \text{ donc } kg \leq y \\ \frac{y}{g} < k + 1 \text{ donc } y < kg + g \text{ donc } y - g < kg \text{ or } g \in]0, y - x[\Rightarrow x < y - g \text{ ainsi } x < kg \end{cases}$$

  Par suite $x < kg \leq y$. Comme $kg \in G$, cela démontre la densité de G dans $\mathbb{R}$.

Exercice III

1. L'ensemble G est inclus dans $\mathbb{R}$, il suffit donc de démontrer que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. On a $0 \in G$ donc $G \neq \emptyset$. Soit x et x' deux éléments de G alors

$$\begin{array}{ll} \exists (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, & x = am + n \\ \exists (n',m') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, & x' = am' + n' \end{array}$$

il vient

$$x - x' = a(m - m') + (n - n')$$

or $m - m' \in \mathbb{Z}$ et $n - n' \in \mathbb{Z}$ donc $x - x' \in G$. Il en résulte que $(G, +)$ est un groupe.

2. Le nombre a est rationnel. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a = \frac{p}{q}$. En vertu du théorème de Bezout, il existe deux entiers m et n tels que $mp + nq = 1$, on a alors

$$m\frac{p}{q} + n = \frac{1}{q}$$

Notons $\alpha = \frac{1}{q}$, on a $\frac{1}{q} \in G$, comme G est un groupe, il vient

$$\{k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\} \subset G$$

Soit $x \in G$ alors, il existe deux entiers relatifs m et n tels que $x = ma + n = m\frac{p}{q} + n = (mp + nq)\alpha$ ainsi $x \in \{k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$, il vient

$$G \subset \{k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Ainsi $G = \{k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Raisonnons par l'absurde. Supposons que G soit monogène, notons α le générateur du groupe, alors

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ ma + n = k\alpha$$

En particulier pour $m = 0$ et $n = 1$, il existe un entier relatif k manifestement non nul tel que $1 = k\alpha$ donc $\alpha = \frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$. Considérons maintenant $m = 1$ et $n = 0$, il existe un entier relatif k tel que $a = k\alpha$ donc $a \in \mathbb{Q}$ ce qui est exclu par hypothèses.

Ainsi G n'est pas monogène. En vertu de la question 3 de l'exercice II, G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice IV

1. Montrons que $\overline{E} = [-1, 1]$.

Montrons que $[-1,1] \subset \overline{E}$**.** Soit $x \in [-1, 1]$, notons $y = \arcsin(x)$. Notons $a = 2\pi$ et

$$G = \{ma + n,\ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

En vertu de la périodicité de sin, il vient

$$E = \{\sin(ma + n),\ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} = \sin(G)$$

Or $a = 2\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc G est dense dans $\mathbb{R}$, donc il existe une suite (v_t) d'éléments de G convergente vers y. Notons $u_t = \sin v_t$ alors (u_t) est une suite d'éléments de E, en outre, par continuité de sin, il vient

$$\lim u_t = \sin y = x$$

Ainsi $x \in \overline{E}$.

Montrons que $\overline{E} \subset [-1,1]$. Soit $x \in \overline{E}$ alors il existe une suite (u_t) d'éléments de E convergent vers x. Or $-1 \leq u_t \leq 1$ donc $x = \lim u_t \in [-1,1]$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est indénombrable or E est dénombrable donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\not\subset E$, donc $x \notin \overset{\circ}{E}$. Il en résulte

$$\overset{\circ}{E} = \emptyset$$

3. On a $\overline{E} = [-1,1]$ et $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ donc

$$\partial E = [-1,1]$$

Soit $x \in [-1,1]$ et $\varepsilon > 0$. Notons $y = x + \frac{\varepsilon}{2}$, on a $y \in \overline{E}$ donc

$$\left]y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2}\right[\cap E \neq \emptyset$$

ainsi $]x, x+\varepsilon[\cap E \neq \emptyset$, soit alors $z \in]x, x+\varepsilon[\cap E$ on a

$$z \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap E \text{ et } z \neq x$$

par suite $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap E \neq \{x\}$ donc x n'est pas isolé. D'autre part $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ n'est pas élément de E donc n'est pas isolé. On en déduit

$$E^* = \emptyset$$

On a $E' \cup E^* = \overline{E} = [-1,1]$ donc

$$E' = [-1,1]$$