Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Devoir 4

A rendre le 24/03/2006

Exercice I

Soit $(G, +)$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et $A = G \cap]0, +\infty[$. Montrer que soit A admet un plus petit élément, soit $0 \in \overline{A}$.

Exercice II

Soit $(G, +)$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer que si $G \cap]0, +\infty[$ admet un plus petit élément α alors

$$G = \{k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

On dit dans ce cas que G est monogène.

2. Montrer que si $G \cap]0, +\infty[$ n'admet pas de plus petit élément alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe un élément de G dans $]0, \varepsilon[$.

3. Montrer que G est soit monogène soit dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice III

Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$G = \{am + n,\ (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(G, +)$ est un groupe.

2. Soit $a \in \mathbb{Q}$, montrer que G est monogène.

3. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice IV

Soit

$$E = \{\sin(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$$

1. Déduire de ce qui précède que $\overline{E} = [-1; 1]$

2. Déterminer $\mathring{E}$.

3. Déterminer ∂E, E^* et E'.