Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Devoir 3

Corrigé

Exercice I

Les résultats présentés dans cet exercice ont été obtenus au moyen d'un tableur. La feuille de calcul est disponible à `www.cagnol.com/promotion2010/cs103/D3c-cs103-05.xls`.

1. On calcule les 31 premiers termes de la suite (u_n) issue de la condition initiale $u_0 = 0.1$. On obtient

λ	0.5	1.5	2	2.5	3.4	3.56	3.58	3.83	4
u_0	0.10000000	0.10000000	0.10000000	0.10000000	0.10000000	0.10000000	0.10000000	0.10000000	0.10000000
u_1	0.04500000	0.13500000	0.18000000	0.22500000	0.30600000	0.32040000	0.32220000	0.34470000	0.36000000
u_2	0.02148750	0.17516250	0.29520000	0.43593750	0.72203760	0.77516807	0.78182603	0.86512772	0.92160000
u_3	0.01051289	0.21672090	0.41611392	0.61473999	0.68237763	0.62044582	0.61065523	0.44689111	0.28901376
u_4	0.00520119	0.25462943	0.48592625	0.59208684	0.73691056	0.83835439	0.85116440	0.94669728	0.82193923
u_5	0.00258707	0.28468992	0.49960386	0.60380004	0.65916952	0.48243806	0.45352715	0.19326771	0.58542054
u_6	0.00129019	0.30546236	0.49999969	0.59806388	0.76386121	0.88890202	0.88726818	0.59715561	0.97081333
u_7	0.00064426	0.31823266	0.50000000	0.60095869	0.61328268	0.35156858	0.35808361	0.92134782	0.11333925
u_8	0.00032192	0.32544095	0.50000000	0.59951836	0.80636792	0.81156649	0.82289786	0.27754484	0.40197385
u_9	0.00016091	0.32929371	0.50000000	0.60024024	0.53087158	0.54441771	0.52173836	0.76796748	0.96156350
u_{10}	0.00008044	0.33128904	0.50000000	0.59987974	0.84675961	0.88297636	0.89330825	0.68248084	0.14783656
u_{11}	0.00004022	0.33230492	0.50000000	0.60006010	0.44117642	0.36785163	0.34120486	0.82996385	0.50392365
u_{12}	0.00002011	0.33281754	0.50000000	0.59996994	0.83823527	0.82783104	0.80472710	0.54050438	0.99993842
u_{13}	0.00001005	0.33307504	0.50000000	0.60001503	0.46102946	0.50739544	0.56256620	0.95121648	0.00024630
u_{14}	0.00000503	0.33320409	0.50000000	0.59999249	0.84483641	0.88980529	0.88098598	0.17772611	0.00098498
u_{15}	0.00000251	0.33326868	0.50000000	0.60000376	0.44569869	0.34906452	0.37536185	0.55971444	0.00393603
u_{16}	0.00000126	0.33330100	0.50000000	0.59999812	0.83997465	0.80889780	0.83938589	0.94384293	0.01568213
u_{17}	0.00000063	0.33331717	0.50000000	0.60000094	0.45701861	0.55031246	0.48264564	0.20300322	0.06174481
u_{18}	0.00000031	0.33332525	0.50000000	0.59999953	0.84371884	0.88098842	0.89392180	0.61966685	0.23172955
u_{19}	0.00000016	0.33332929	0.50000000	0.60000023	0.44831502	0.37325826	0.33947571	0.90265380	0.71212386
u_{20}	0.00000008	0.33333131	0.50000000	0.59999988	0.84091745	0.83281405	0.80275039	0.33654178	0.82001387
u_{21}	0.00000004	0.33333232	0.50000000	0.60000006	0.45483598	0.49567591	0.56686508	0.85516780	0.59036448
u_{22}	0.00000002	0.33333283	0.50000000	0.59999997	0.84306472	0.88993344	0.87899404	0.47436785	0.96733704
u_{23}	0.00000001	0.33333308	0.50000000	0.60000001	0.44984243	0.34870882	0.38078140	0.95498366	0.12638436
u_{24}	0.00000000	0.33333321	0.50000000	0.59999999	0.84144634	0.80851508	0.84411719	0.16465119	0.44164542
u_{25}	0.00000000	0.33333327	0.50000000	0.60000000	0.45360894	0.55115366	0.47106843	0.52678270	0.98637897
u_{26}	0.00000000	0.33333330	0.50000000	0.60000000	0.84268276	0.88068456	0.89200341	0.95475269	0.05374198
u_{27}	0.00000000	0.33333332	0.50000000	0.60000000	0.45073300	0.37408219	0.34487330	0.16545596	0.20341513
u_{28}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.84174739	0.83355515	0.80884984	0.52884749	0.64814965
u_{29}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.45290965	0.49391783	0.55351017	0.95431276	0.91220672
u_{30}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.84246050	0.88986831	0.88474925	0.16698768	0.32034248

On calcule les 31 premiers termes de la suite (u_n) issue de la condition initiale $u_0 = 0.5$. On obtient

λ	0.5	1.5	2	2.5	3.4	3.56	3.58	3.83	4
u_0	0.50000000	0.50000000	0.50000000	0.50000000	0.50000000	0.50000000	0.50000000	0.50000000	0.50000000
u_1	0.12500000	0.37500000	0.50000000	0.62500000	0.85000000	0.89000000	0.89500000	0.95750000	1.00000000
u_2	0.05468750	0.35156250	0.50000000	0.58593750	0.43350000	0.34852400	0.33643050	0.15585706	0.00000000
u_3	0.02584839	0.34194946	0.50000000	0.60653687	0.83496435	0.80831588	0.79921717	0.50389640	0.00000000
u_4	0.01259012	0.33753004	0.50000000	0.59662474	0.46851621	0.55159110	0.57447933	0.95744185	0.00000000
u_5	0.00621581	0.33540527	0.50000000	0.60165915	0.84662982	0.88052456	0.87514113	0.15606082	0.00000000
u_6	0.00308859	0.33436286	0.50000000	0.59916354	0.44148241	0.37451578	0.39118350	0.50443337	0.00000000
u_7	0.00153952	0.33384651	0.50000000	0.60041648	0.83835735	0.83394321	0.85260911	0.95742472	0.00000000
u_8	0.00076858	0.33358953	0.50000000	0.59979133	0.46074863	0.49299568	0.44988720	0.15612085	0.00000000
u_9	0.00038399	0.33346133	0.50000000	0.60010423	0.84476172	0.88982534	0.88600957	0.50459150	0.00000000
u_{10}	0.00019192	0.33339731	0.50000000	0.59994786	0.44587381	0.34900888	0.36156786	0.95741926	0.00000000
u_{11}	0.00009594	0.33336531	0.50000000	0.60002606	0.84003921	0.80883798	0.82639483	0.15614000	0.00000000
u_{12}	0.00004797	0.33334932	0.50000000	0.59998697	0.45686935	0.55044400	0.51360977	0.50464195	0.00000000
u_{13}	0.00002398	0.33334133	0.50000000	0.60000652	0.84367514	0.88094123	0.89433689	0.95741747	0.00000000
u_{14}	0.00001199	0.33333733	0.50000000	0.59999674	0.44841716	0.37338624	0.33830433	0.15614625	0.00000000
u_{15}	0.00000600	0.33333533	0.50000000	0.60000163	0.84095332	0.83292949	0.80139915	0.50465841	0.00000000
u_{16}	0.00000300	0.33333433	0.50000000	0.59999919	0.45475285	0.49540233	0.56978762	0.95741689	0.00000000
u_{17}	0.00000150	0.33333383	0.50000000	0.60000041	0.84303916	0.88992475	0.87756428	0.15614831	0.00000000
u_{18}	0.00000075	0.33333358	0.50000000	0.59999980	0.44990205	0.34873294	0.38465386	0.50466383	0.00000000
u_{19}	0.00000037	0.33333346	0.50000000	0.60000010	0.84146666	0.80854107	0.84736906	0.95741669	0.00000000
u_{20}	0.00000019	0.33333340	0.50000000	0.59999995	0.45356176	0.55109658	0.46301835	0.15614898	0.00000000
u_{21}	0.00000009	0.33333336	0.50000000	0.60000003	0.84266786	0.88070534	0.89010384	0.50466561	0.00000000
u_{22}	0.00000005	0.33333335	0.50000000	0.59999999	0.45076770	0.37402587	0.35019200	0.95741663	0.00000000
u_{23}	0.00000002	0.33333334	0.50000000	0.60000001	0.84175901	0.83350464	0.81465607	0.15614921	0.00000000
u_{24}	0.00000001	0.33333334	0.50000000	0.60000000	0.45288264	0.49403776	0.54054977	0.50466620	0.00000000
u_{25}	0.00000001	0.33333334	0.50000000	0.60000000	0.84245185	0.88987345	0.88911346	0.95741661	0.00000000
u_{26}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.45127089	0.34887535	0.35295475	0.15614928	0.00000000
u_{27}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.84192661	0.80869437	0.81759214	0.50466639	0.00000000
u_{28}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.45249305	0.55075971	0.53390412	0.95741660	0.00000000
u_{29}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.84232651	0.88082749	0.89088483	0.15614930	0.00000000
u_{30}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.45156272	0.37369471	0.34800841	0.50466646	0.00000000

On calcule les 31 premiers termes de la suite (u_n) issue de la condition initiale $u_0 = 0.8$. On obtient

λ	0.5	1.5	2	2.5	3.4	3.56	3.58	3.83	4
u_0	0.80000000	0.80000000	0.80000000	0.80000000	0.80000000	0.80000000	0.80000000	0.80000000	0.80000000
u_1	0.08000000	0.24000000	0.32000000	0.40000000	0.54400000	0.56960000	0.57280000	0.61280000	0.64000000
u_2	0.03680000	0.27360000	0.43520000	0.60000000	0.84341760	0.87275479	0.87602657	0.90876769	0.92160000
u_3	0.01772288	0.29811456	0.49160192	0.60000000	0.44901880	0.39535176	0.38880238	0.31754137	0.28901376
u_4	0.00870439	0.31386340	0.49985894	0.60000000	0.84116312	0.85101354	0.85073362	0.82999489	0.82193923
u_5	0.00431431	0.32302975	0.49999996	0.60000000	0.45426627	0.45137061	0.45460962	0.54042593	0.58542054
u_6	0.00214785	0.32802230	0.50000000	0.60000000	0.84288865	0.88158125	0.88762418	0.95124080	0.97081333
u_7	0.00107162	0.33063550	0.50000000	0.60000000	0.45025307	0.37164887	0.35709605	0.17764206	0.11333925
u_8	0.00053523	0.33197350	0.50000000	0.60000000	0.84158583	0.83135252	0.82189089	0.55950693	0.40197385
u_9	0.00026747	0.33265064	0.50000000	0.60000000	0.45328502	0.49913161	0.52406280	0.94393769	0.96156350
u_{10}	0.00013370	0.33299129	0.50000000	0.60000000	0.84258022	0.88999732	0.89292711	0.20268104	0.14783656
u_{11}	0.00006684	0.33316214	0.50000000	0.60000000	0.45097191	0.34853145	0.34227765	0.61893350	0.50392365
u_{12}	0.00003342	0.33324769	0.50000000	0.60000000	0.84182724	0.80832392	0.80594271	0.90332397	0.99993842
u_{13}	0.00001671	0.33329050	0.50000000	0.60000000	0.45272408	0.55157345	0.55990863	0.33447304	0.00024630
u_{14}	0.00000835	0.33331191	0.50000000	0.60000000	0.84240096	0.88053104	0.88215122	0.85256116	0.00098498
u_{15}	0.00000418	0.33332262	0.50000000	0.60000000	0.45138939	0.37449822	0.37217839	0.48143340	0.00393603
u_{16}	0.00000209	0.33332798	0.50000000	0.60000000	0.84196583	0.83392752	0.83650866	0.95617973	0.01568213
u_{17}	0.00000104	0.33333066	0.50000000	0.60000000	0.45240186	0.49303298	0.48960769	0.16047721	0.06174481
u_{18}	0.00000052	0.33333199	0.50000000	0.60000000	0.84229702	0.88982720	0.89461336	0.51599398	0.23172955
u_{19}	0.00000026	0.33333266	0.50000000	0.60000000	0.45163135	0.34900372	0.33752346	0.95652026	0.71212386
u_{20}	0.00000013	0.33333300	0.50000000	0.60000000	0.84204561	0.80883244	0.80049292	0.15928685	0.82001387
u_{21}	0.00000007	0.33333317	0.50000000	0.60000000	0.45221632	0.55045618	0.57174034	0.51289271	0.59036448
u_{22}	0.00000003	0.33333325	0.50000000	0.60000000	0.84223685	0.88093686	0.87657490	0.95686337	0.96733704
u_{23}	0.00000002	0.33333329	0.50000000	0.60000000	0.45177140	0.37339811	0.38732501	0.15808655	0.12638436
u_{24}	0.00000001	0.33333331	0.50000000	0.60000000	0.84209161	0.83294018	0.84954956	0.50975459	0.44164542
u_{25}	0.00000000	0.33333332	0.50000000	0.60000000	0.45210933	0.49537698	0.45757807	0.95713557	0.98637897
u_{26}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.84220205	0.88992391	0.88855736	0.15713369	0.05374198
u_{27}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.45185238	0.34873525	0.35450298	0.50725551	0.20341513
u_{28}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.84211814	0.80854356	0.81921361	0.95729838	0.64814967
u_{29}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.45204760	0.55109111	0.53020757	0.15656348	0.91220670
u_{30}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.84218193	0.88070733	0.89173326	0.50575669	0.32034253

On calcule les 31 premiers termes de la suite (u_n) issue de la condition initiale $u_0 = 0.9$. On obtient

λ	0.5	1.5	2	2.5	3.4	3.56	3.58	3.83	4
u_0	0.90000000	0.90000000	0.90000000	0.90000000	0.90000000	0.90000000	0.90000000	0.90000000	0.90000000
u_1	0.04500000	0.13500000	0.18000000	0.22500000	0.30600000	0.32040000	0.32220000	0.34470000	0.36000000
u_2	0.02148750	0.17516250	0.29520000	0.43593750	0.72203760	0.77516807	0.78182603	0.86512772	0.92160000
u_3	0.01051289	0.21672090	0.41611392	0.61473999	0.68237763	0.62044582	0.61065523	0.44689111	0.28901376
u_4	0.00520119	0.25462943	0.48592625	0.59208684	0.73691056	0.83835439	0.85116440	0.94669728	0.82193923
u_5	0.00258707	0.28468992	0.49960386	0.60380004	0.65916952	0.48243806	0.45352715	0.19326771	0.58542054
u_6	0.00129019	0.30546236	0.49999969	0.59806388	0.76386121	0.88890202	0.88726818	0.59715561	0.97081333
u_7	0.00064426	0.31823266	0.50000000	0.60095869	0.61328268	0.35156858	0.35808361	0.92134782	0.11333925
u_8	0.00032192	0.32544095	0.50000000	0.59951836	0.80636792	0.81156649	0.82289786	0.27754484	0.40197385
u_9	0.00016091	0.32929371	0.50000000	0.60024024	0.53087158	0.54441771	0.52173836	0.76796748	0.96156350
u_{10}	0.00008044	0.33128904	0.50000000	0.59987974	0.84675961	0.88297636	0.89330825	0.68248084	0.14783656
u_{11}	0.00004022	0.33230492	0.50000000	0.60006010	0.44117642	0.36785163	0.34120486	0.82996385	0.50392365
u_{12}	0.00002011	0.33281754	0.50000000	0.59996994	0.83823527	0.82783104	0.80472710	0.54050438	0.99993842
u_{13}	0.00001005	0.33307504	0.50000000	0.60001503	0.46102946	0.50739544	0.56256620	0.95121648	0.00024630
u_{14}	0.00000503	0.33320409	0.50000000	0.59999249	0.84483641	0.88980529	0.88098598	0.17772611	0.00098498
u_{15}	0.00000251	0.33326868	0.50000000	0.60000376	0.44569869	0.34906452	0.37536185	0.55971444	0.00393603
u_{16}	0.00000126	0.33330100	0.50000000	0.59999812	0.83997465	0.80889780	0.83938589	0.94384293	0.01568213
u_{17}	0.00000063	0.33331717	0.50000000	0.60000094	0.45701861	0.55031246	0.48264564	0.20300322	0.06174481
u_{18}	0.00000031	0.33332525	0.50000000	0.59999953	0.84371884	0.88098842	0.89392180	0.61966685	0.23172955
u_{19}	0.00000016	0.33332929	0.50000000	0.60000023	0.44831502	0.37325826	0.33947571	0.90265380	0.71212386
u_{20}	0.00000008	0.33333131	0.50000000	0.59999988	0.84091745	0.83281405	0.80275039	0.33654178	0.82001387
u_{21}	0.00000004	0.33333232	0.50000000	0.60000006	0.45483598	0.49567591	0.56686508	0.85516780	0.59036448
u_{22}	0.00000002	0.33333283	0.50000000	0.59999997	0.84306472	0.88993344	0.87899404	0.47436785	0.96733704
u_{23}	0.00000001	0.33333308	0.50000000	0.60000001	0.44984243	0.34870882	0.38078140	0.95498366	0.12638436
u_{24}	0.00000000	0.33333321	0.50000000	0.59999999	0.84144634	0.80851508	0.84411719	0.16465119	0.44164542
u_{25}	0.00000000	0.33333327	0.50000000	0.60000000	0.45360894	0.55115366	0.47106843	0.52678270	0.98637897
u_{26}	0.00000000	0.33333330	0.50000000	0.60000000	0.84268276	0.88068456	0.89200341	0.95475269	0.05374198
u_{27}	0.00000000	0.33333332	0.50000000	0.60000000	0.45073300	0.37408219	0.34487330	0.16545596	0.20341513
u_{28}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.84174739	0.83355515	0.80884984	0.52884749	0.64814965
u_{29}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.45290965	0.49391783	0.55351017	0.95431276	0.91220672
u_{30}	0.00000000	0.33333333	0.50000000	0.60000000	0.84246050	0.88986831	0.88474925	0.16698768	0.32034248

Nous remarquons que lorsque $\lambda \in \{0.5, 1.5, 2, 2.5\}$, le comportement de la suite semble indépendant de la condition initiale. Pour les autres valeurs de λ, le comportement de la suite semble affecté par la condition initiale.

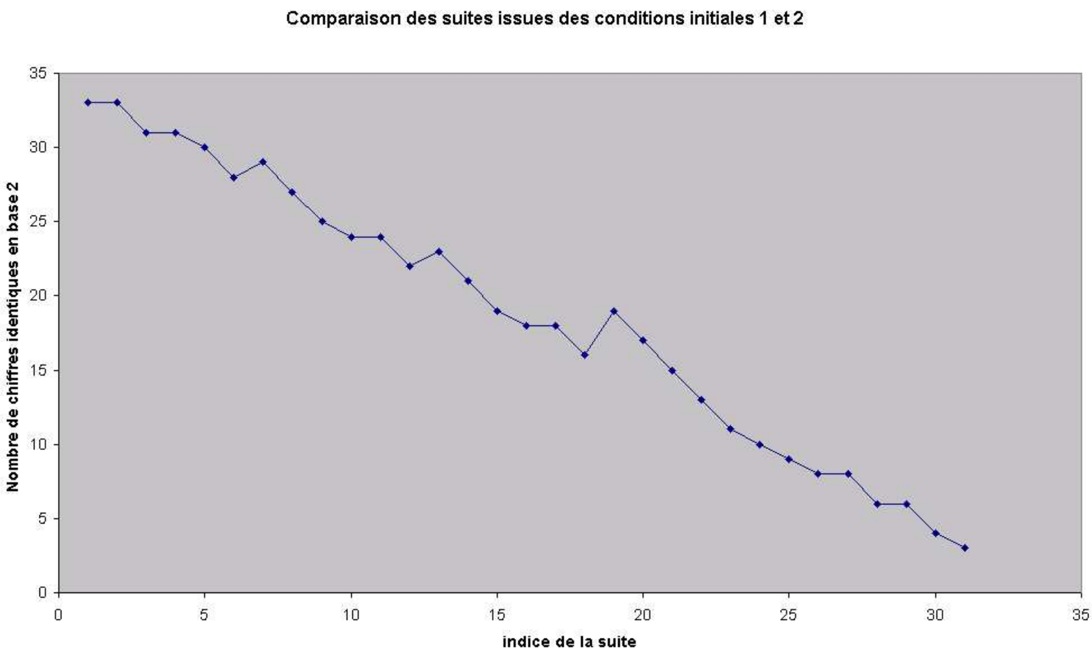
2. On calcule la suite (u_n) issue de la condition initiale $u_0 = \frac{2}{3}$ (appelée condition initiale 1) et $u_0 = \frac{2}{3} + 10^{-10}$ (appelée condition initiale 2). Pour les besoins de la question suivante on présente également la valeur absolue de la différence des deux résultats.

La différence entre les deux conditions initiales considérées est très petite (10^{-10}), toutefois le comportement de la suite est très différent après une trentaine de termes. Nous remarquons que la différence augmente "a vitesse constante" (on dit aussi linéairement) par rapport à l'indice n. Dans la question suivante on illustrera cette dépendance de la différence par rapport l'indice n considéré.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-après

	Première condition initiale	Seconde condition initiale	Valeur absolue de la différence
u_0	0.66666666667	0.66666666677	0.00000000010
u_1	0.88888888889	0.88888888876	0.00000000013
u_2	0.39506172840	0.39506172881	0.00000000041
u_3	0.95595183661	0.95595183696	0.00000000035
u_4	0.16843169077	0.16843168950	0.00000000127
u_5	0.56024982525	0.56024982188	0.00000000337
u_6	0.98547983423	0.98547983585	0.00000000162
u_7	0.05723732222	0.05723731592	0.00000000631
u_8	0.21584484468	0.21584482234	0.00000002234
u_9	0.67702339081	0.67702334003	0.00000005079
u_{10}	0.87465087642	0.87465094834	0.00000007193
u_{11}	0.43854688320	0.43854666762	0.00000021558
u_{12}	0.98489405774	0.98489395176	0.00000010598
u_{13}	0.05951101107	0.05951142219	0.00000041112
u_{14}	0.22387780252	0.22387925129	0.00000144876
u_{15}	0.69502612824	0.69502932852	0.00000320028
u_{16}	0.84785923721	0.84785424407	0.00000499314
u_{17}	0.51597580434	0.51598969953	0.00001389518
u_{18}	0.99897909470	0.99897731804	0.00000177667
u_{19}	0.00407945220	0.00408654434	0.00000709214
u_{20}	0.01625124108	0.01627937799	0.00002813691
u_{21}	0.06394855297	0.06405743936	0.00010888639
u_{22}	0.23943654217	0.23981633527	0.00037979311
u_{23}	0.72842673777	0.72921784244	0.00079110467
u_{24}	0.79128490189	0.78983672283	0.00144817906
u_{25}	0.66061242372	0.66397869639	0.00336627267
u_{26}	0.89681459738	0.89244394852	0.00437064886
u_{27}	0.37015270122	0.38395098909	0.01379828787
u_{28}	0.93255871600	0.94613050827	0.01357179227
u_{29}	0.25157182886	0.20387027838	0.04770155048
u_{30}	0.75313377513	0.64922875189	0.10390502324

3. On représente en abscisse le numéro du terme et en ordonnée le nombre de chiffres après la virgule qui sont communs dans le développement en base 2 des termes de la suite issues des deux conditions initiales différentes. Les raisons de ce choix deviendront claires dans l'exercice IV.



Exercice II

1. La fonction f est dérivable comme fonction polynomiale et sa dérivée est $f'(x) = \lambda(1-2x)$. On en déduit que f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Par suite, sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction f admet comme minimum $f(0) = f(1) = 0$ et comme maximum $f(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4}$. Or $\lambda \in [0,4]$ donc pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) \in [0,1]$, c'est-à-dire $f([0,1]) \subset [0,1]$.

2. Notons $(\mathcal{H}_n)$ l'hypothèse $u_n \in [0,1]$. Montrons cette hypothèse par récurrence

- Par hypothèse $u_0 \in [0,1]$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vérifiée.

- Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie alors $u_n \in [0,1]$, en vertu de la question précédente

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$$

  donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vérifiée.

On a donc (u_n) minorée par 0 et majorée par 1.

3. Le réel x est un équilibre de (1) si et seulement si $f(x) = x$, c'est-à-dire

$$x(\lambda - 1 - \lambda x) = 0$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 1 - \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ x = 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

ainsi les équilibres de (1) sont

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 1 - \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda \notin \{0,1\} \\ x = 0 & \text{si } \lambda \in \{0,1\} \end{cases}$$

Notons désormais $\beta = 1 - \frac{1}{\lambda}$ si $\lambda \notin \{0,1\}$.

Exercice III

1. Considérons deux cas

- Si $\lambda \in [0,1[$ alors $|f'(0)| = \lambda < 1$ donc 0 est un équilibre stable.
- Si $\lambda \in]1,4[$ alors $|f'(0)| = \lambda > 1$ donc 0 est un équilibre instable (répulsif).

Lorsque $\lambda \in [0,1[$, le caractère stable de 0 est illustré par la question 1 de l'exercice I : pour les quatre conditions initiales, la suite semblait converger vers 0 lorsque $\lambda = 0.5$.

2. On a $u_{n+1} - u_n = (\lambda - 1)u_n - \lambda u_n^2 \leq 0$ donc (u_n) est décroissante. Comme $u_0 \in [0,1]$ et en vertu de la question 2 de l'exercice II, (u_n) est minorée par 0. Ainsi (u_n) est convergente. Elle converge vers le seul point d'équilibre positif de (1) qui est 0.

3. On a

$$u_{n+1} - u_n = \lambda u_n \left(1 - u_n - \frac{1}{\lambda}\right)$$

Si $u_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$ alors $1 - u_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}$ donc

$$1 - u_n - \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \geq 0$$

par suite $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante tant que $u_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$.

Si (u_n) est majorée par $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$ alors elle est convergente et sa limite appartient à $]u_0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}[$ ce qui est impossible puisqu'il n'y a pas d'équilibre dans cet intervalle. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$.

On a $|f'(x)| < 1$ si et seulement si $x \in I$ où $I =]\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}[$. Remarquons que β est dans cet intervalle puisque $\lambda \in]1,3[$, c'est un équilibre stable. Le bassin d'attraction de β est l'intervalle I, or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in I$, donc $\lim u_n = \beta$.

4. Si $\lambda > 3$ alors $|f'(\beta)| = |2-\lambda| = \lambda - 2 > 1$ donc β est un équilibre répulsif[1].

Exercice IV

1. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante et continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. L'application arcsin est strictement croissante et continue de $[0,1]$ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. L'application $x \mapsto \frac{2}{\pi}x$ est strictement croissante et continue de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0,1]$. L'application h est la composée de ces trois fonctions, elle est donc strictement croissante et continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, par suite elle réalise une bijection continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

2. Soit $x \in [0.1]$ alors

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x(1-x)} &= 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} \\
&= 2\sin(\arcsin\sqrt{x})\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\sqrt{x})} \\
&= 2\sin(\arcsin\sqrt{x})\sqrt{\cos^2(\arcsin\sqrt{x})} \\
&= 2\sin(\arcsin\sqrt{x})\cos(\arcsin\sqrt{x}) \\
&= \sin(2\arcsin\sqrt{x})
\end{aligned}$$

- Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ alors $\sqrt{x} \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ donc $\arcsin\sqrt{x} \in [0, \frac{\pi}{4}]$, ainsi $2\arcsin\sqrt{x} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\arcsin\left[\sin(2\arcsin\sqrt{x})\right] = 2\arcsin\sqrt{x}$$

ainsi

$$\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{4x(1-x)} = \frac{4}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$$

d'où $h(f(x)) = g(h(x))$.

- Si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$ alors $\sqrt{x} \in]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ donc $\arcsin\sqrt{x} \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, ainsi $2\arcsin\sqrt{x} \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ donc

$$\arcsin\left[\sin(2\arcsin\sqrt{x})\right] = 2\arcsin\sin(\pi - 2\arcsin\sqrt{x})$$

avec $\pi - 2\arcsin\sqrt{x} \in]0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\arcsin\left[\sin(2\arcsin\sqrt{x})\right] = \pi - 2\arcsin\sqrt{x}$$

ainsi

$$\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{4x(1-x)} = 2 - \frac{4}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$$

d'où $h(f(x)) = g(h(x))$.

On a donc $h \circ f = g \circ h$.

3. On a $v_{n+1} = h(u_{n+1}) = h(f(u_n)) = g(h(u_n)) = g(v_n)$.

4. Soit $x \in [0,1]$ et (x_n) les chiffres du développement en base 2 de x. On a $x_n \in \{0,1\}$ et

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

[1] Les suites (u_n) ont un comportement cyclique lorsque $\lambda \in]3,4[$. La "longueur" du cycle est une fonction croissante de λ. Lorsque $\lambda = 3$, la suite converge lentement vers $\frac{2}{3}$. L'étude du comportement de la suite est difficile dans ces cas.

- Supposons que $x_1 = 0$, alors $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$g\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{2^n}\right) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{2^n} = 2\sum_{n=2}^{N} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{n=2}^{N} \frac{x_n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_{n+1}}{2^n}$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, il vient

$$g\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n}$$

c'est-à-dire $g(x) = \overline{0.x_2\, x_3 \ldots x_n \ldots}$.

- Supposons que $x_1 = 0$, alors $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$g\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{2^n}\right) = 2\left(1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{2^n}\right)$$

or

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^N}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^N}$$

ainsi

$$g\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{2^n}\right) = 2\left(\frac{1}{2^N} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{2^n}\right)$$

donc

$$g\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{2^n}\right) = 2\left(\frac{1}{2^N} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1 - x_n}{2^n}\right) = 2\left(\frac{1}{2^N} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1 - x_n}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{N-1}} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1 - x_n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{N-1}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1 - x_{n+1}}{2^n}$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, il vient

$$g\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - x_{n+1}}{2^n}$$

c'est-à-dire $g(x) = \overline{0.(1 - x_2)\,(1 - x_3) \ldots (1 - x_n) \ldots}$.

Considérons la suite (v_n) correspondant à la suite (u_n) issue de la condition initiale u_0 et (v'_n) la suite correspondant à (u'_n) issue de la condition initiale $u'_0 = u_0 + \varepsilon$. L'étude faite dans les questions 2 et 3 de l'exercice I suggère qu'une modification infime de la condition initiale a de gros effets sur les termes de la suite.

Soit $\varepsilon > 0$. Notons (ε_n) le développement de ε en base 2. Si ε est petit, alors les premiers chiffres après la virgule du développement en base 2 seron nuls. Notons k l'entier tel que $\varepsilon_n = 0$ pour $n \leq k$.

$$\varepsilon = \overline{0.0 \ldots 0\varepsilon_{k+1} \ldots x_n \ldots}$$

ainsi les k (ou[2] $k-1$) premiers chiffres du développement en base de 2 de v_0 et v'_0 sont identiques. En appliquant k fois (2) il vient que v_k et v'_k ont tous leurs chiffres après la virgule potentiellement différents. Cela explique que quelquesoit la variation ε de la condition initiale, après un certain nombre d'itérations, les termes de la suite sont très différents.

[2]Si $\varepsilon_k = 1$ et le k-ième chiffre après la virgule de v_0 en base 2 est 1