Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Devoir 3

A rendre le 28/02/2006

Soit $\lambda \in [0; 4]$. On considère la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \lambda u_n(1 - u_n) \tag{1}$$

La condition initiale $u_0 \in [0, 1]$. Nous noterons f l'application définie par $f(x) = \lambda x(1 - x)$, appelée *application logistique*. Bien que (1) s'écrive de manière simple, les suites (u_n) peuvent avoir des comportements très riches qui se retrouvent dans de nombreux phénomènes naturels, par exemple l'évolution des effectifs d'une population dans un système clot.

Exercice I

Expérimentation numérique.

Dans cet exercice on utilisera une calculatrice programmable ou un ordinateur (par exemple avec un tableur).

1. Observer le comportement des 31 premiers termes de la suite (u_n) pour

$$u_0 \in \{0.1, 0.5, 0.8, 0.9\}$$

$$\lambda \in \{0.5, 1.5, 2, 2.5, 3.4, 3.5, 3.56, 3.58, 3.83, 4\}$$

2. Calculer des valeurs de (u_n) lorsque $\lambda = 4$ et $u_0 = \frac{2}{3}$, $u_0 = \frac{2}{3} + 10^{-10}$. Comparer ces valeurs lorsque n est assez grand (prendre $n = 30$).

3. Lorsque $\lambda = 4$, représenter graphiquement, en fonction de n, la différence entre le terme d'indice n pour la suite issue de la condition initiale $\frac{2}{3}$ et le terme d'indice n pour la suite issue de la condition initiale $\frac{2}{3} + 10^{-10}$.

Exercice II

Généralités.

1. Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.

2. Montrer que (u_n) est bornée.

3. Discuter les équilibres de (1), en fonction de λ. S'il y a deux équilibres on note β l'équilibre non nul.

Exercice III

Etude du *régime stationnaire.*

1. Montrer que 0 est stable pour $\lambda \in [0,1[$ et répulsif pour $\lambda \in]1,4]$.

2. Etudier la convergence de la suite lorsque $\lambda \in [0,1]$.

3. Montrer que si $\lambda \in]1,3[$ et $u_0 \notin \{0,1\}$ alors (u_n) est croissante tant que $u_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$. En déduire que (u_n) converge vers β.

4. Montrer que β est répulsif pour $\lambda > 3$.

Exercice IV

Etude d'un régime *chaotique.*

On se place dorénavant dans le cas où $\lambda = 4$. Nous allons d'abord transformer (u_n) en une suite (v_n) plus simple à étudier, puis nous expliquerons le phénomène de *sensibilité aux conditions initiales* observé dans l'exercice I, questions 2 et 3.

1. Soit

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{x}\right)$$

Montrer que h est une bijection continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

2. On définit la fonction g par :

$$g\,(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2\,(1-x) & \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que $h \circ f = g \circ h$.

3. On pose $v_n = h\,(u_n)$. Montrer que $v_{n+1} = g\,(v_n)$.

4. Soit $x \in [0,1]$ et (x_n) les chiffres du développement en base 2 de x. On a $x_n \in \{0,1\}$ et

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

On note

$$\overline{0, x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots}$$

Montrer que

$$\begin{cases} g\,(\overline{0,0\,x_2\,x_3 \ldots x_n \ldots}) & = & \overline{0, x_2\,x_3 \ldots x_n \ldots} \\ g\,(\overline{0,1\,x_2\,x_3 \ldots x_n \ldots}) & = & \overline{0,(1-x_2)\,(1-x_3) \ldots (1-x_n) \ldots} \end{cases} \tag{2}$$

Expliquer la *sensibilité aux conditions initiales* observée aux questions 2 et 3 de l'exercice I.