Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Devoir 2

A rendre le 17/01/2006

Dans ce devoir on considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{2^n}$ et pour tout entier naturel N on note $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.

Exercice I

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Exercice II

Soit N et q des entiers naturels tels que $N \geq q$.

1. Montrer que $\sum_{n=q}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{q-1}} - \frac{1}{2^N}$.

2. Montrer que $S_N = \sum_{q=1}^{N} \sum_{n=q}^{N} \frac{1}{2^n}$.

3. Montrer que $S_N = 2 - \frac{1}{2^{N-1}} - \frac{N}{2^N}$.

4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice III

Soit N un entier naturel et f_N la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} n x^{n-1}$$

1. Soit F_n la primitive de f_n qui s'annule en 0, montrer que si $x \neq 1$ alors

$$F_N(x) = \frac{x^{N+1} - x}{x - 1}$$

2. En déduire une expression de $f_n(x)$ qui n'utilise ni $\sum$ ni points de suspensions.

3. Montrer que

$$S_N = \frac{1}{2} f_N\left(\frac{1}{2}\right)$$

4. En déduire, par une seconde méthode la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.